УДК 517.93

ЗАДАЧА ОТДЕЛЕНИЯ ТРЕНДОВ В ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

А.А. Ломов
Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4
E-mail: lomov@math.nsc.ru

Ключевые слова: линейные динамические системы, идентификация параметров, оценки сигналов, аддитивные тренды в измерениях
Key word: linear dynamic systems, parameter identification, state estimation, additive trends in measurements

Рассматривается задача идентификации параметров линейных стационарных систем в условиях наличия аддитивных трендов в измерениях сигналов входа и выхода. Совместно с оценками параметров вычисляются оценки сигналов системы и сигналов трендов. Получены условия идентифицируемости сигналов и параметров системы и уравнений трендов.
TREND SEPARATION PROBLEM IN LINEAR SYSTEMS / A.A. Lomov (Sobolev Institute of Mathematics, 4 Acad. Koptyug prosp., Novosibirsk 630090, Russia, E-mail: lomov@math.nsc.ru). The parameter estimation problem for linear dynamic systems with additive trends and stochastic errors in variables is considered. The system and trend signals estimates are computed jointly with estimates of the system and trend equations parameters. The identifiability conditions for signal and parameter estimates are discussed.

1. Введение

В работе рассматривается вопрос о построении алгоритмов идентификации параметров систем управления с учетом возможного наличия аддитивных трендов нестохастического характера в измерениях сигналов. Такими трендами могут быть, в частности, полиномиальные или экспоненциальные функции времени, известные с точностью до параметров (коэффициентов полинома, амплитуд или показателей экспонент). Целью исследования было выяснить: 1) как влияют неучтенные аддитивные тренды, присутствующие в измерениях, на оценки параметров системы; 2) возможно ли (и при каких условиях) построить состоятельные алгоритмы идентификации параметров системы в условиях наличия трендов; 3) как отделить тренды, восстановив значения полезного сигнала; 4) каковы условия идентифицируемости параметров системы управления и параметров уравнений трендов.

В работе принято, что тренды и полезный сигнал описываются линейными уравнениями с постоянными коэффициентами. Изложение в ряде мест следует статье [1].

Рассмотрим объект, описываемый системой уравнений

$$(1) \qquad Gz = 0,$$

где z — вектор из отсчетов сигналов объекта на интервале наблюдения, G — матрица с ненулевым правым нуль-пространством $\operatorname{nul} G \neq 0$. Пусть τ — сигнал тренда, описываемый системой линейных уравнений

$$(2) \qquad F\tau = 0, \quad \operatorname{nul} F \neq 0.$$

Наблюдаемой величиной является сумма ς сигналов объекта и тренда:

$$\varsigma = z + \tau.$$

Рассмотрим задачу отделения трендов τ от полезного сигнала z в наблюдениях ς. Сформулируем ряд задач возрастающей сложности, из которых каждая последующая опирается на решение предыдущей.

Задача 1. *По наблюдению ς при известных матрицах F, G восстановить z, τ.*

Если решение единственное, будем говорить, что сигналы тренда τ и объекта z *разделяемы.*

Далее, предположим

$$\varsigma = z + \tau + \eta,$$

где $\eta \in \mathrm{N}(0, \sigma^2 I)$ — вектор случайных возмущений.

Задача 2. *По наблюдениям ς при известных матрицах F, G найти z, τ, доставляющие минимум мат. ожидания нормы $\|\varsigma - z - \tau\|^2$.*

Пусть теперь матрицы F и G известны с точностью до параметров:

$$F = F_\theta, \quad G = G_\theta, \quad \theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^v.$$

Задача 3. *По наблюдениям ς найти z, τ и параметры θ, доставляющие минимум мат. ожидания нормы $\|\varsigma - z - \tau\|^2$.*

В работе изучаются алгоритмы решения и условия однозначной разрешимости задач 1–3. Основное внимание уделено случаю динамических систем (когда матрицы F, G имеют клеточно-теплицевую структуру). При этом не накладывается ограничений на устойчивость и управляемость систем F и G.

Определение 1. *Суммарной системой* по отношению к (1) и (2) назывется система $S\varsigma = 0$, решениями которой являются все возможные значения суммарного сигнала $\varsigma = z + \tau$ при ограничениях (1) и (2). Матрица S определяется условием $\operatorname{nul} S = \operatorname{nul} G + \operatorname{nul} F$, где знак сложения означает суммирование линейных подпространств.

Основные результаты работы:

1. Получены условия разделяемости сигналов объекта и тренда в терминах матриц F, G.

2. Описаны алгоритмы восстановления (фильтрации) сигналов z, τ в задачах 1,2.

3. Описаны алгоритмы состоятельного оценивания параметров θ и сигналов z, τ в задаче 3.

4. Показано, что оценка параметров θ в задаче 3 сводится к идентификации параметров суммарной системы.

5. Показано, что для двух систем с клеточно-теплицевыми матрицами их сложение в смысле определения 1 дает суммарную систему с клеточно-теплицевой матрицей, т. е. сумма двух динамических систем является динамической системой. Описаны алгоритмы построения матриц S суммарных систем.

6. Показано, что суммарные системы S всегда неуправляемы.

7. Показано, что состоятельные оценки параметров неуправляемых систем могут быть получены методами типа ортогональной регрессии.

8. Получены условия идентифицируемости параметров тренда и параметров объекта по наблюдениям суммарного сигнала.

2. Уравнения объекта и тренда

Отметим, что при постановке задачи в предыдущем разделе уравнения объекта (1) и тренда (2) употребляются равноправно. С этой точки зрения уместно ставить и решать общую задачу выделения решений двух линейных систем из наблюдений суммы решений. Построение полной теории подобного рода суммирования линейных систем предполагает обобщение на многомерный случай, однако это выходит за рамки настоящей работы. Здесь излагается только идея исследования на простых примерах. В частности, здесь предполагаем, что множество допустимых значений сигналов трендов беднее множества сигналов системы, хотя данное ограничение не является принципиальным.

Будем считать, что тренды являются решениями некоторого линейного однородного разностного (дифференциального) уравнения с постоянными коэффициентами. К этому классу относятся как многочлены (и квазимногочлены), так и экспоненциальные функции времени t, в том числе с комплексными показателями, вида $\exp(\rho + \mathrm{i}\omega t)$, i — мнимая единица. Некоторые необходимые сведения об однородных траекториях приведены в приложении, раздел 10.1.

Перейдем к описанию объекта. Общую запись вида (1) приведем к интересующему нас случаю динамических систем. Обозначим

$$z \doteq (z_1; \dots ; z_N)\,, \qquad z_i \doteq (y_i; u_i)\,,$$

где y_k, u_k есть отсчеты векторных сигналов выхода и входа объекта в k-й момент времени. Здесь и далее применяются обозначения $(X, Y) \doteq (XY)$, $(X; Y) \doteq \binom{X}{Y}$. Пусть матрица G имеет клеточно-теплицевый вид

$$G = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \dots & \gamma_p \end{pmatrix}, \qquad \gamma_i = (\alpha_i, -\beta_i)\,. \tag{3}$$

Тогда система (1) будет равносильна системе разностных уравнений

$$\alpha_p y_{k+p} + \ldots + \alpha_0 y_k = \beta_p u_{k+p} + \ldots + \beta_0 u_k, \qquad k \in \overline{1, N-p}. \tag{4}$$

Здесь $p \geqslant 0$ — формальный порядок системы, $N \geqslant p+1$ — длина траектории, $\alpha_i = \alpha_{i,\theta} \in \mathbb{R}^{r \times r}$, $\beta_i = \beta_{i,\theta} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ — матрицы, зависящие от фиксированного параметра θ, который подлежит оцениванию.

Сформулируем условия на коэффициенты α_i, β_i. Эти условия довольно слабые, поскольку на систему не налагается требований устойчивости, управляемости, минимальнофазовости и т.п. Условия имеют характер требований, чтобы система уравнений (1), (4) была неизбыточной, в частности, чтобы в ней не было линейно зависимых строк. Кроме того, зависимость коэффициентов α_i, β_i от параметра θ должна быть такой, чтобы по измерениям сигналов y_k, u_k можно было бы этот параметр восстановить. Это условие идентифицируемости, или *различимости* разных значений θ по наблюдениям множеств решений $\{z\}$ системы с разными значениями θ.

Сопоставим системе (4) многочленную матрицу

$$\gamma_\theta(s) \doteq \gamma_{0,\theta} + \gamma_{1,\theta} s + \ldots + \gamma_{p,\theta} s^p \in \mathbb{R}^{r \times (r+m)}[s], \tag{5}$$

$$\gamma_{i,\theta} \doteq \gamma_i = (\alpha_i, -\beta_i) \in \mathbb{R}^{r \times (r+m)}.$$

Запись $\mathbb{R}^{r \times (r+m)}[s]$ обозначает кольцо многочленов с действительными матричными коэффициентами из $\mathbb{R}^{r \times (r+m)}$. Для удобства изложения будем считать, что многочленная матрица

$$\alpha(s) \doteq \alpha_0 + \alpha_1 s + \ldots + \alpha_p s^p \in \mathbb{R}^{r \times r}[s]$$

неособенная почти всюду, за исключением конечного числа точек $s \in \mathbb{C}$. Если это не так, следует переупорядочить столбцы $\gamma(s)$, выбрав в качестве $\alpha(s)$ произвольную неособенную подматрицу из столбцов $\gamma(s)$.

Введем также числовую матрицу

$$\gamma_\theta \doteq (\gamma_{0,\theta} \gamma_{1,\theta} \ldots \gamma_{p,\theta}) \in \mathbb{R}^{r \times (r+m)(p+1)}. \tag{6}$$

Обозначим $\gamma^i \doteq \left(\gamma_0^i \gamma_1^i \ldots \gamma_p^i\right)$ i-ю строку γ_θ, и определим вектор

$$\gamma = \gamma(\theta) \doteq \left(\gamma^1; \ldots; \gamma^r\right) \doteq \operatorname{vec} \gamma_\theta \tag{7}$$

как последовательно составленный из строк матрицы γ_θ.

На систему (4) налагаются условия:

(i) Отображение $\theta \leftrightarrow \gamma(\theta)$ взаимно однозначно. Дополнительное предположение о сильной дифференцируемости отображения $\theta \leftrightarrow \gamma(\theta)$ в смысле Фреше используется для формулирования простых критериев различимости [2, 3].

(ii) Для каждого значения параметра $\theta \in \Omega$ в матрице $\gamma_\theta(s)$:

а) строки линейно независимы;

б) сумма степеней строк $p_1 + \ldots + p_r \doteq n$ постоянна;

в) $\gamma_\theta(s)$ имеет наименьшую сумму степеней строк среди всех левоэквивалентных $\gamma_\theta(s)$ матриц, т. е. $\gamma_\theta(s)$ *приведена по строкам*;

г) числовая матрица $\gamma_\theta(0) = \gamma_{0,\theta}$ имеет линейно независимые строки.

Условия (а, в, г) обеспечивают неизбыточность описания (4). Условие (б) вместе с (в) фиксирует число n, которое есть размерность пространства состояний и является фактическим (не формальным) порядком системы в случае матричных коэффициентов α_i, β_i [4].

(iii) Параметры θ системы *различимы* в том смысле, что любым двум различным значениям θ соответствуют разные множества решений системы (4). Для различимости необходимо и достаточно, чтобы из равенства $\rho(s)\gamma_\theta(s) = \gamma_\xi(s)$, $\xi \in \Omega$, следовало $\rho(s) = I$, $\xi = \theta$. Алгоритмически проверяемые критерии различимости в виде ограничений на ранги специальных матриц, построенных из элементов γ_θ, приведены в [2, 3].

Отметим, что условия (i)–(iii) не накладывают ограничений на устойчивость и управляемость системы. Это позволяет включить в рассмотрение новые задачи оценки параметров и сигналов. Ниже будет показано, что суммарные системы, с необходимостью возникающие при идентификации параметров систем с аддитивными трендами, всегда неуправляемы.

Оговорим обозначения.

Пусть $\mathcal{N}$ — некоторое линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$, и $\overline{\mathcal{N}}$ — его ортогональное дополнение.

Если A — числовая матрица, будем обозначать $\operatorname{nul} A$ правое нуль-пространство, $\operatorname{im} A$ — линейную оболочку столбцов, $\operatorname{linr} A$ — линейную оболочку строк. Заметим, что в англоязычной литературе нуль-пространство матрицы обозначается $\ker A$. Следуя отечественной традиции, мы применяем обозначения $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$, $\operatorname{Im} \mathcal{A}$ к ядру и образу *отображения* $\mathcal{A}$, задаваемого матрицей A, а по отношению к самой матрице будем писать $\operatorname{nul} A$ и $\operatorname{im} A$. Из определений следует тождественное равенство

$$\operatorname{linr} A = \overline{\operatorname{nul} A}. \tag{8}$$

Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Обозначим $\overline{A} \in \mathbb{R}^{n\times k}$ матрицу, столбцы которой образуют базис дополнения $\operatorname{im} A$ до $\mathbb{R}^n$, и $A_\perp \in \mathbb{R}^{m\times t}$ — матрицу, столбцы которой образуют базис подпространства $\operatorname{nul} A$. Имеют место соотношения:

$$\operatorname{im} A = \operatorname{nul} \overline{A}^{\mathrm{T}}, \tag{9}$$

$$\operatorname{nul} A = \operatorname{im} A_\perp, \qquad AA_\perp = 0. \tag{10}$$

Матрицы $\overline{A}$, $A_\perp$ обладают следующими свойствами [1, разд. 1.1]:

Предложение 1. *Верны соотношения:*

1) если столбцы матрицы A линейно независимы, то $\overline{(\overline{A})} \doteq \overline{\overline{A}} = A$;

2) всегда $(A_\perp)_\perp \doteq A_{\perp\perp} = 0$*;*
3) всегда $(\overline{A})_\perp = 0$*;*
4) если строки матрицы A *линейно независимы, то* $\overline{(A_\perp)} \doteq \overline{A_\perp} = A^{\mathrm{T}}$*.*

3. Условия разделяемости

Запишем уравнения для сигналов объекта и тренда (1), (2) в виде системы

$$\left\{ \begin{array}{l} \varsigma = (I, I) \begin{pmatrix} z \\ \tau \end{pmatrix}, \\ \\ \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ \tau \end{pmatrix} = 0. \end{array} \right. \tag{11}$$

Примем обозначения

$$P \doteq \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}, \quad N \doteq (I, I), \quad x \doteq \begin{pmatrix} z \\ \tau \end{pmatrix},$$

тогда получим запись

$$\left\{ \begin{array}{l} \varsigma = Nx, \\ Px = 0. \end{array} \right. \tag{12}$$

Если задача вычисления x по предъявленному ς при известных матрицах F и G (или P) имеет единственное решение, будем говорить, что сигналы тренда τ и объекта z *разделяемы*.

Пусть наблюдение ς не содержит ошибок и точно удовлетворяет системе (12) при некотором x. Условие $Px = 0$ равносильно выполнению равенства $x = P_\perp \chi$ при некотором χ, и вычисление x сводится к вычислению χ. Из первого уравнения системы (12) получаем

$$\varsigma = NP_\perp \chi.$$

Отсюда следует

Предложение 2. *Сигналы тренда* τ *и объекта* z *разделяемы тогда и только тогда, когда столбцы матрицы* $NP_\perp$ *линейно независимы:*

$$\operatorname{nul} NP_\perp = 0. \tag{13}$$

Утверждение 1. *Следующие условия разделяемости равносильны условию* (13)*:*

$$\operatorname{nul}(G_\perp, F_\perp) = 0, \tag{14}$$

$$\operatorname{nul} \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = 0, \tag{15}$$

$$\operatorname{nul} F \cap \operatorname{nul} G = 0. \tag{16}$$

Доказательство приведено в [1, разд. 6.2].

Отметим, что разделяемость сигналов тренда и системы равносильна нулевому пересечению многообразий трендов и траекторий системы ($\operatorname{nul} F \cap \operatorname{nul} G = 0$).

Рассмотрим теперь случай, когда системы (1), (2) являются динамическими, то есть матрицы F и G клеточно-теплицевые, имеют вид (3) и получены из разностных уравнений вида (4). Переупорядочим компоненты траектории. Примем

$$\upsilon_k \doteq (y_k; u_k) \doteq \left(\upsilon_k^{[1]}; \ldots; \upsilon_k^{[r+m]}\right) \in \mathbb{R}^{r+m}.$$

Вместо $z = (y_1; u_1; \ldots; y_N; u_N) = (\upsilon_1; \ldots; \upsilon_N)$ запишем

$$z = \left(\upsilon_1^{[1]}; \ldots; \upsilon_N^{[1]}; \ldots; \upsilon_1^{[r+m]}; \ldots; \upsilon_N^{[r+m]}\right). \tag{17}$$

Определим оператор сдвига s посредством соотношений для $k \geqslant 0$

$$s^k E \doteq \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & \ldots & 0 & 1 & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{array}\right) \in \mathbb{R}^{(N-p)\times N}. \tag{18}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{k} \qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{p-k}$$

Тогда уравнение (3) можно записать через многочленную матрицу $\gamma_\theta(s)$ в виде

$$(\gamma_\theta(s) \otimes E)\, z = 0, \tag{19}$$

где $\otimes$ — символ кронекерова произведения. Аналогично уравнения (1) и (2) можно записать с матрицами G и F вида

$$G = \gamma(s) \otimes E, \qquad F = \varphi(s) \otimes E. \tag{20}$$

Пусть $A(s)$ — многочленная матрица. Каноническую форму $A(s)$, состоящую из нулей и инвариантных многочленов на диагонали [5, с. 135], обозначим $\operatorname{Sm} A(s)$.

Утверждение 2. *Условие* $\operatorname{nul} F \cap \operatorname{nul} G = 0$ *равносильно тому, что каноническая форма* $\operatorname{Sm}\begin{pmatrix}\gamma(s)\\ \varphi(s)\end{pmatrix}$ *для всех* $s \in \mathbb{C}$ *(или, что равносильно, для всех* $s \in \mathbb{R}$*) имеет линейно независимые столбцы:*

$$\forall\, s \in \mathbb{R} \quad \operatorname{nul} \operatorname{Sm}\begin{pmatrix}\gamma(s)\\ \varphi(s)\end{pmatrix} = 0. \tag{21}$$

Последнее означает, что $\operatorname{Sm}\begin{pmatrix}\gamma(s)\\ \varphi(s)\end{pmatrix}$ *состоит только из нулей и единиц и является "вертикальной" (число строк не меньше числа столбцов).*

Доказательство [1, разд. 6.2] основано на том, что условие $\operatorname{nul} F \cap \operatorname{nul} G = 0$ равносильно линейной независимости столбцов составной матрицы: $\operatorname{nul}\begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} = 0$. Последнее означает, что однородная система (57), коэффициенты которой совпадают с коэффициентами матричного многочлена $\alpha(s) \doteq \begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \varphi(s) \end{pmatrix}$, имеет только нулевые траектории. Следовательно, каноническая форма $\operatorname{Sm}\alpha(s)$ для всех s имеет линейно независимые столбцы, т. е. состоит только из нулей и единиц и является "вертикальной" (раздел 10.1. в приложении).

4. Формулы отделения трендов (решение задач 1 и 2)

В задаче 1 суммарный сигнал $\varsigma = z + \tau$ является решением системы (12), т. е. не содержит возмущений. Запишем систему (11), (12) в равносильном виде

$$\begin{cases} \varsigma = z + \tau, \\ z = G_\perp w, \\ \tau = F_\perp e. \end{cases} \tag{22}$$

Цель состоит в том, чтобы по известному суммарному сигналу ς при известных матрицах $G_\perp$, $F_\perp$ восстановить значения слагаемых z, τ (или w, e). Это задача косого проецирования ς на подпространства $\operatorname{im} G_\perp$, $\operatorname{im} F_\perp$, или разложения ς в сумму

$$\varsigma = G_\perp w + F_\perp e. \tag{23}$$

Решение [1, раздел 8.2] имеет вид

$$F_\perp e = F_\perp \left(F_\perp^{\mathrm{T}} \overline{G_\perp}\, \overline{G_\perp}^{\mathrm{T}} F_\perp \right)^{-1} F_\perp^{\mathrm{T}} \overline{G_\perp}\, \overline{G_\perp}^{\mathrm{T}} \varsigma,$$

$$G_\perp w = \varsigma - F_\perp e.$$

В силу соотношения 4 в предложении 1, предыдущее выражение можно переписать в виде

$$F_\perp e = F_\perp \left(F_\perp^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} G F_\perp \right)^{-1} F_\perp^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} G \varsigma. \tag{24}$$

Обратная матрица в правой части (24) существует, только если столбцы матрицы $GF_\perp$ линейно независимы: $\operatorname{nul} GF_\perp = 0$. Для последнего достаточно выполнения условий разделяемости (14), (15). Действительно, из $\operatorname{nul} A = 0$ и $\operatorname{nul} B = 0$ всегда следует $\operatorname{nul} AB = 0$, и для $A = \begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix}$, $B = (G_\perp, F_\perp)$ получаем

$$\operatorname{nul}\begin{pmatrix} G \\ F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_\perp & F_\perp \end{pmatrix} = \operatorname{nul}\begin{pmatrix} 0 & GF_\perp \\ FG_\perp & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

т. е. $\operatorname{nul} GF_\perp = 0$.

Несложно увидеть, что все матрицы и произведения, входящие в формулу (24), имеют простую структуру, и вычисления легко выполнимы практически для любых размерностей вектора ς (примеры приведены в [1, раздел 6.6]).

В задаче 2 суммарный сигнал ς содержит аддитивные стохастические ошибки $\eta \in \mathrm{N}(0, \sigma^2 I)$. Система (12) заменяется системой

$$\begin{cases} \varsigma = Nx + \eta, \\ Px = 0. \end{cases}$$

Записав второе уравнение в виде $x = P_\perp \chi$, перейдем к уравнению

$$\varsigma = NP_\perp \chi + \eta.$$

Получение оценки $\hat{x} \doteq \binom{\hat{z}}{\hat{\tau}}$ вектора x по множеству $\mathcal{N}_L \doteq \{\varsigma_1, \ldots, \varsigma_L\}$ наблюдений случайной величины ς сводится к вычислению оценки $\hat{\chi}$ минимизацей квадратичной функции потерь:

$$\hat{\chi} = \arg\min_{\chi} \frac{1}{L} \sum_i \left\| \varsigma_i - NP_\perp \chi \right\|^2 . \tag{25}$$

Необходимое условие минимума выражается уравнением

$$P_\perp^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}} N P_\perp \hat{\chi} = P_\perp^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}} \bar{\varsigma}, \quad \bar{\varsigma} \doteq \left(\frac{1}{L} \sum_i \varsigma_i \right). \tag{26}$$

Однозначное вычисление величины $\hat{\chi}$ (и следовательно $\hat{x}$) из последнего уравнения возможно тогда и только тогда, когда матрица $P_\perp^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}} N P_\perp$ обратима, что равносильно линейной независимости столбцов $NP_\perp$.

Таким образом, условия разделяемости трендов и сигналов системы, сформулированные в предложении 2 и утверждении 1, остаются верными и в случае, когда измерения ς содержат аддитивные стохастические возмущения $\eta \in \mathrm{N}(0, \sigma^2 I)$.

Обозначим $\hat{\varsigma}$ оценку (отфильтрованное значение) суммарного сигнала ς, полученную из уравнения (26):

$$\hat{\varsigma} = NP_\perp \hat{\chi} = NP_\perp \left(P_\perp^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}} N P_\perp \right)^{-1} P_\perp^{\mathrm{T}} N^{\mathrm{T}} \bar{\varsigma}. \tag{27}$$

Сигнал $\hat{\varsigma}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \hat{\varsigma} = (I, I) \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{\tau} \end{pmatrix}, \\[2ex] \begin{pmatrix} G & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{z} \\ \hat{\tau} \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \tag{28}$$

для некоторых значений переменных $\hat{z}$, $\hat{\tau}$. Для вычисления $\hat{z}$, $\hat{\tau}$, как нетрудно видеть, следует применять формулы (23), (24) с заменой ς на $\hat{\varsigma}$.

Рассмотрим особенности вычисления $\hat{\varsigma}$ по формуле (27). Введем обозначение $NP_\perp \doteq S_\perp$ и заметим, что любое допустимое условием (28) значение суммарного сигнала $\hat{\varsigma} = \hat{z} + \hat{\tau}$ является линейной комбинацией столбцов матрицы $S_\perp$. В работе [1] установлено следующее

Утверждение 3. *Для клеточно-теплицевых матриц F, G суммарное многообразие $\{\hat{\varsigma} = \hat{z} + \hat{\tau}\} = \operatorname{nul} F + \operatorname{nul} G = \operatorname{im} S_{\perp}$ является множеством решений некоторой стационарной динамической системы $S\hat{\varsigma} = 0$ с клеточно-теплицевой матрицей S:*

$$\operatorname{nul} S = \operatorname{nul} F + \operatorname{nul} G, \qquad S = \sigma(s) \otimes E. \tag{29}$$

Без ограничения общности будем считать, что строки многочленной матрицы $\sigma(s)$ линейно независимы. Используя матрицу S, решение задачи оптимального восстановления (фильтрации) суммарного сигнала запишем в виде формулы

$$\hat{\varsigma} = S_{\perp}^{\mathrm{T}} \left(S_{\perp} S_{\perp}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} S_{\perp} \overline{\varsigma} = \left(I - S^{\mathrm{T}} \left(S S^{\mathrm{T}}\right)^{-1} S\right) \overline{\varsigma} \doteq \Pi \overline{\varsigma}, \tag{30}$$

где $\Pi \doteq S_{\perp}^{\mathrm{T}} \left(S_{\perp} S_{\perp}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} S_{\perp} = I - S^{\mathrm{T}} \left(S S^{\mathrm{T}}\right)^{-1} S$ есть матрица проектора на подпространство $\operatorname{im} S_{\perp}$ всех возможных значений суммы $\hat{z} + \hat{\tau}$.

Устойчивые "быстрые" алгоритмы вычисления проекции $\hat{\varsigma} = \Pi\overline{\varsigma}$ для клеточно-теплицевых матриц S были предложены в [6]. Сложность программной реализации обсуждалась в [7].

5. Матрицы суммарных систем

В предыдущем разделе было установлено, что сложение двух динамических систем в смысле определения 1 дает в результате динамическую систему. Опишем алгоритм построения матриц S суммарных систем и установим, что суммарные системы всегда неуправляемы.

Определение. Пусть $\mathcal{N}$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$. *Описанием* для $\mathcal{N}$ называется матрица $P \in \mathbb{R}^{m\times n}$ со свойством $\operatorname{nul} P = \mathcal{N}$.

Установим свойство описаний суммарных многообразий.

Предложение 3. *Пусть S — описание суммарного многообразия $\operatorname{nul} F + \operatorname{nul} G$ для произвольных матриц F, G одинаковых размеров. Тогда верно равенство*

$$\operatorname{linr} S = \operatorname{linr} F \cap \operatorname{linr} G. \tag{31}$$

Доказательство. По условию, $\operatorname{nul} S = \operatorname{nul} F + \operatorname{nul} G$. Следовательно, $\overline{\operatorname{nul} S} = \overline{\operatorname{nul} F + \operatorname{nul} G} = \overline{\operatorname{nul} F} \cap \overline{\operatorname{nul} G}$. Учитывая (8), получаем $\operatorname{linr} S = \operatorname{linr} F \cap \operatorname{linr} G$. Предложение доказано.

Пусть теперь G, F — клеточно-теплицевые матрицы:

$$G \doteq \gamma(s) \otimes E, \qquad \gamma(s) \in \mathbb{R}^{r\times t}[s],$$

$$F \doteq \varphi(s) \otimes E, \qquad \varphi(s) \in \mathbb{R}^{q\times t}[s],$$

и пусть S — описание суммарной системы, удовлетворяющее равенству (29). Выразим соотношение (31) через многочленные матрицы $\gamma(s)$, $\varphi(s)$, $\sigma(s)$. Имеет место

Утверждение 4. 1) $S \doteq \sigma(s) \otimes E$, $\sigma(s) \in \mathbb{R}^{k\times t}[s]$, $k \leqslant \min\{q, r\}$; 2) *строки многочленной матрицы* $\sigma(s)$ *являются базисом пересечения линейных оболочек многочленных строк матриц* $\varphi(s)$, $\gamma(s)$*:*

$$\operatorname{linr}\sigma(s) = \operatorname{linr}\varphi(s) \cap \operatorname{linr}\gamma(s). \tag{32}$$

Доказательство. Из соотношения (29) с учетом свойств кронекерова произведения получаем

$$\operatorname{linr} S = (\operatorname{linr}\varphi(s) \otimes E) \cap (\operatorname{linr}\gamma(s) \otimes E) = (\operatorname{linr}\varphi(s) \cap \operatorname{linr}\gamma(s)) \otimes E.$$

Следовательно,

$$\operatorname{linr}\sigma(s) = \operatorname{linr}\varphi(s) \cap \operatorname{linr}\gamma(s).$$

Из последнего равенства следует соотношение $k \leqslant \min\{q, r\}$. Утверждение доказано.

Обратим внимание, что в выражении $\operatorname{linr}\gamma(s)$ с многочленной матрицей $\gamma(s)$ подразумеваются линейные комбинации над полем многочленов, т.е. $\operatorname{linr}\gamma(s)$ есть множество всевозможных сумм строк матрицы $\gamma(s)$, умноженных на скалярные многочлены.

Равенство (32) является отправной точкой для построения матриц суммарных систем.

Пример А. Пусть

$$F = \varphi(s) \otimes E, \qquad \varphi(s) = s^2 + \varphi_1 s + \varphi_0,$$
$$G = \gamma(s) \otimes E, \qquad \gamma(s) = s^2 + \gamma_1 s + \gamma_0.$$

Полагаем, что многочлены γ и φ взаимно просты, т. е. НОД$(\gamma, \varphi) = 1$. Выберем $N = 6$, тогда

$$F = \begin{pmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & & 0 \\ & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & \\ & & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & \\ 0 & & & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & 1 & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & 1 & & \\ & & \gamma_0 & \gamma_1 & 1 & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построим матрицу S описания для суммарного многообразия $\operatorname{nul} F + \operatorname{nul} G$.

1. Согласно утверждению 4,

$$S = \sigma(s) \otimes E, \qquad \operatorname{linr}\sigma(s) = \operatorname{linr}\varphi(s) \cap \operatorname{linr}\gamma(s).$$

Подпространство $\operatorname{linr}\varphi(s)$ образовано многочленами $p\varphi$, $p \in \mathbb{R}[s]$. Аналогично, подпространство $\operatorname{linr}\gamma(s)$ образовано многочленами $q\gamma$, $q \in \mathbb{R}[s]$. Пересечением этих подпространств является множество многочленов $r\varphi\gamma$, $r \in \mathbb{R}[s]$. Базисом пересечения является многочлен $\sigma = \varphi\gamma$, которому соответствует числовая теплицевая матрица $S = (\varphi(s)\gamma(s)) \otimes E$.

2. Построение матрицы S можно выполнить непосредственно, не обращаясь к урверждению 4. Множество решений системы $Fx = 0$ состоит из векторов $x = (x(1); \ldots ; x(6))$, $x(t) = x_{01}s_1^t + x_{02}s_2^t$, $t \in \overline{1,6}$, где x_{01}, x_{02} — числовые коэффициенты начальных условий, $s_{1,2}$ — корни многочлена $\varphi(s)$ (см. раздел 10.1. в приложении). Для простоты изложения предполагаем, что все корни многочленов имеют кратность 1. В случае наличия корней кратности $\geqslant 2$ ход рассуждений остается тем же.

Множество решений системы $Gy = 0$ состоит из векторов

$$y = (y(1); \ldots ; y(6)) , \quad y(t) = y_{01}s_3^t + y_{02}s_4^t, \quad t \in \overline{1,6},$$

где y_{01}, y_{02} — произвольные числовые коэффициенты начальных условий, $s_{3,4}$ — корни многочлена $\gamma(s)$. Суммарное множество $\{z\} = \{x\} + \{y\}$ состоит из векторов $z = (z(1); \ldots ; z(6))$,

$$z(t) = x_{01}s_1^t + x_{02}s_2^t + y_{01}s_3^t + y_{02}s_4^t, \qquad t \in \overline{1,6}, \tag{33}$$

где $x_{01}, x_{02}, y_{01}, y_{02}$ — произвольные числовые коэффициенты начальных условий, $\{s_1, \ldots , s_4\}$ — объединение множеств корней многочленов $\varphi(s)$ и $\gamma(s)$.

Из (33) следует, что суммарное множество $\{z\}$ является множеством решений системы уравнений $Sz = 0$ с теплицевой матрицей S, составленной из коэффициентов многочлена $\sigma(s) = \varphi(s)\gamma(s)$:

$$S = (\varphi(s)\gamma(s)) \otimes E = \begin{pmatrix} \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & 1 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Заметим, что многообразия траекторий $\mathrm{nul}\, G$ и $\mathrm{nul}\, F$ имеют нулевое пересечение, как это следует из утверждения 2:

$$\mathrm{Sm} \begin{pmatrix} \gamma(s) \\ \varphi(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{nul}\, G \cap \mathrm{nul}\, F = 0.$$

Пример Б. Рассмотрим две динамические системы с матрицами F, G:

$$G \doteq (\alpha, \beta) \otimes E, \tag{34}$$

$$\alpha = \alpha(s) = s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0, \qquad \beta = \beta(s) = s^2 + \beta_1 s + \beta_0,$$

$$F \doteq \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \otimes E, \tag{35}$$

$$\varphi = \varphi(s) = s^2 + \varphi_1 s + \varphi_0, \qquad \zeta = \zeta(s) = s^2 + \zeta_1 s + \zeta_0,$$

$$\text{НОД}(\alpha, \beta, \zeta, \varphi) = 1.$$

Для $N = 5$

$$G = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & 0 & \beta_0 & \beta_1 & 1 & 0 \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & 1 & & \beta_0 & \beta_1 & 1 \\ 0 & & \alpha_0 & \alpha_1 \;\; 1 & 0 & & \beta_0 & \beta_1 \;\; 1 \end{array}\right),$$

$$F = \left(\begin{array}{cccccc|cccccc} \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & 0 & & & & & & & \\ & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & & & & 0 & & & \\ 0 & & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & & & & & & \\ \hline & & & & & & \zeta_0 & \zeta_1 & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & & & & \zeta_0 & \zeta_1 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & & \zeta_0 & \zeta_1 & 1 & \end{array} \right).$$

Система с матрицей G имеет порядок $p = 2$ в числителе и знаменателе. Уравнение (4) для нее имеет вид:

$$y_{k+2} + \alpha_1 y_{k+1} + \alpha_0 y_k = u_{k+2} + \beta_1 u_{k+1} + \beta_0 u_k, \qquad k \in \overline{1,3}.$$

Множество траекторий системы с матрицей F состоит из независимых однородных движений y', u' на входе и выходе. Они описываются уравнениями

$$y'_{k+2} + \varphi_1 y'_{k+1} + \varphi_0 y'_k = 0, \qquad u'_{k+2} + \zeta_1 u'_{k+1} + \zeta_0 u'_k = 0, \qquad k \in \overline{1,3}. \tag{36}$$

Заданием коэффициентов φ_i, ζ_i можно определить, например, чтобы множества решений $\{y'\}$ и $\{u'\}$ состояли:

1. из многочленов с действительными коэффициентами порядка не выше заданного (в данном примере $\leqslant 2$);

2. из синусоидальных сигналов с экспоненциальным затуханием (нарастанием) амплитуды (см. раздел 10.1. в приложении).

1. Построим описание S для суммарного многообразия траекторий

$$\{\varsigma = (y; u) + (y'; u')\} = \operatorname{nul} G + \operatorname{nul} F.$$

По утверждению 4,

$$S = \sigma(s) \otimes E, \qquad \operatorname{linr} \sigma(s) = \operatorname{linr}(\alpha, \beta) \cap \operatorname{linr} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}.$$

Подпространство $\operatorname{linr}(\alpha, \beta)$ состоит из строк

$$(r\alpha, r\beta), \qquad r \in \mathbb{R}[s].$$

Подпространство $\operatorname{linr} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$ состоит из строк

$$(p\varphi, q\zeta), \qquad p, q \in \mathbb{R}[s].$$

Пересечение $\operatorname{linr}(\alpha, \beta) \cap \operatorname{linr} \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$ состоит из строк

$$(r\xi\alpha, r\xi\beta), \qquad r \in \mathbb{R}[s], \qquad \xi \doteq \text{НОК}(\varphi, \zeta),$$

где НОК(φ, ζ) — наименьшее общее кратное многочленов φ, ζ.

Базисом пересечения является строка

$$\sigma = (\xi\alpha, \xi\beta).$$

Следовательно,

$$S = (\xi\alpha, \xi\beta) \otimes E, \qquad \xi \doteq \text{НОК}(\varphi, \zeta).$$

2. Опишем условия, при которых рассматриваемая система допускает отделение трендов. Для отделения необходимо и достаточно, чтобы многообразия траекторий $\operatorname{nul} G$ и $\operatorname{nul} F$ для матриц вида (34), (35) имели нулевое пересечение. Имеет место следующее утверждение [1, утверждение 11]

Утверждение 5. *Пусть*

$$G \doteq (\alpha, \beta) \otimes E, \qquad F \doteq \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix} \otimes E, \qquad \text{НОД}(\alpha, \beta, \zeta, \varphi) = 1.$$

Тогда равенство $\operatorname{nul} G \cap \operatorname{nul} F = 0$ *имеет место тогда и только тогда, когда выполнена система условий*

$$\begin{cases} \text{НОД}(\zeta, \varphi) = 1, \\ \text{НОД}(\zeta, \beta) = 1, \\ \text{НОД}(\alpha, \varphi) = 1. \end{cases} \tag{37}$$

Пример В. Рассмотрим системы более общего вида. Пусть

$$F = \begin{pmatrix} \varphi(s) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \varphi(s) & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} \otimes E = \tag{38}$$

$$= \begin{pmatrix} I_r \otimes \varphi(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \otimes E, \qquad \varphi(s) \in \mathbb{R}^1[s], \quad m \geqslant 1,$$

$$G = \begin{pmatrix} \alpha_1(s) & \dots & \alpha_r(s) & \beta_1(s) & \dots & \beta_m(s) \end{pmatrix} \otimes E, \tag{39}$$

$$\alpha_i(s), \beta_j(s) \in \mathbb{R}^1[s].$$

Полагаем, что многочлены α_i и φ взаимно просты ($\text{НОД}(\alpha_i, \varphi) = 1$, $i = \overline{1, r}$) и многочлены β_j и φ взаимно просты ($\text{НОД}(\beta_j, \varphi) = 1$, $j = \overline{1, m}$). От многочленов α_i и β_j взаимной простоты не требуется. Условие $\text{НОД}(\alpha_i, \beta_j, \zeta, \varphi) = 1$, соответствующее утверждению 5, выполнено в силу $\zeta = 1$.

Утверждение 6. *Для матриц* F (38), G (39) *матрица* S *описания суммарного многообразия* $\operatorname{nul} F + \operatorname{nul} G$ *имеет вид* $S = \sigma(s) \otimes E$,

$$\sigma(s) = \varphi(s) \begin{pmatrix} \alpha_1(s) & \dots & \alpha_r(s) & \beta_1(s) & \dots & \beta_m(s) \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Следуем той же схеме рассуждений, что и в примерах А, Б.

$$\operatorname{linr} \begin{pmatrix} \alpha_1(s) & \dots & \alpha_r(s) & \beta_1(s) & \dots & \beta_m(s) \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ p(s) \begin{pmatrix} \alpha_1(s) & \dots & \alpha_r(s) & \beta_1(s) & \dots & \beta_m(s) \end{pmatrix} : \right.$$
$$\left. p(s) \in \mathbb{R}^1[s] \right\} \doteq g.$$

$$\operatorname{linr} \begin{pmatrix} \varphi(s) I_r & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} p_1(s)\varphi(s) & \dots & p_r(s)\varphi(s) & q_1(s) & \dots & q_m(s) \end{pmatrix} : \right.$$
$$\left. p_i(s), q_j(s) \in \mathbb{R}^1[s] \right\} \doteq f.$$

Из условия взаимной простоты α_i и φ следует, что искомое пересечение $g \cap f$ линейных оболочек строк удовлетворяет равенству

$$g \cap f = \operatorname{linr} \varphi(s) \begin{pmatrix} \alpha_1(s) & \dots & \alpha_r(s) & \beta_1(s) & \dots & \beta_m(s) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\sigma(s) = \varphi(s) \begin{pmatrix} \alpha_1(s) & \dots & \alpha_r(s) & \beta_1(s) & \dots & \beta_m(s) \end{pmatrix}$. Утверждение доказано.

Утверждение 7. *Для матриц* F (38) *и* G (39) *многообразия* $\operatorname{nul} G$ *и* $\operatorname{nul} F$ *имеют нулевое пересечение тогда и только тогда, когда* $r = 1$.

Доказательство. Рассмотрим составную матрицу

$$M \doteq \begin{pmatrix} \alpha_1(s) & \dots & \alpha_r(s) & \beta_1(s) & \dots & \beta_m(s) \\ \varphi(s) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \varphi(s) & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно утверждению 2, $\operatorname{nul} G \cap \operatorname{nul} F = 0$ тогда и только тогда, когда каноническая форма $\operatorname{Sm} M$ состоит только из нулей и единиц, что равносильно взаимной простоте всех миноров M старшего порядка. Выпишем эти миноры:

$$M_0 \doteq \begin{vmatrix} \varphi & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \varphi & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{vmatrix} = \varphi^r,$$

$$M_i \doteq \begin{vmatrix} \varphi & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_r & \beta_1 & \dots & \beta_m \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & \varphi & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 1 \end{vmatrix} = \varphi^{r-1}\alpha_i, \qquad i \in \overline{1, r},$$

$$M_{r+j} \doteq \begin{vmatrix} \varphi & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & \varphi & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_r & \beta_1 & \dots & \beta_j & \dots & & \beta_m \\ & & & & & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{vmatrix} = \varphi^r \beta_j, \qquad j \in \overline{1,m}.$$

Несложно увидеть, что НОД$(M_0, \dots, M_{r+m}) = \varphi^{r-1} = 1$ тогда и только тогда, когда $r = 1$. Утверждение доказано.

Пример Г. Перейдем к системам (4) из нескольких уравнений ($r > 1$). Пусть матрица F, как и в предыдущем примере В, определена равенствами (38). Рассмотрим матрицу G из r строк:

$$(40) \qquad G = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(s) & \dots & \alpha_{1r}(s) & \beta_{11}(s) & \dots & \beta_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r1}(s) & \dots & \alpha_{rr}(s) & \beta_{r1}(s) & \dots & \beta_{rm}(s) \end{pmatrix} \otimes E \doteq \gamma(s) \otimes E,$$

$$\gamma(s) \doteq \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times (r+m)}[s].$$

Полагаем, что $\det \alpha(s) = 0$ не более чем в конечном числе точек $s \in \mathbb{R}$ и НОД$(\varphi, \det \alpha) = 1$.

Утверждение 8. *Для матриц* F (38), G (40) *матрица* S *описания суммарного многообразия* $\operatorname{nul} F + \operatorname{nul} G$ *имеет вид* $S = \sigma(s) \otimes E$,

$$(41) \qquad \sigma(s) = \varphi(s) \begin{pmatrix} \alpha_{11}(s) & \dots & \alpha_{1r}(s) & \beta_{11}(s) & \dots & \beta_{1m}(s) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r1}(s) & \dots & \alpha_{rr}(s) & \beta_{r1}(s) & \dots & \beta_{rm}(s) \end{pmatrix} = \varphi(s)\gamma(s).$$

Доказательство. Пусть $\gamma_i(s)$ обозначает i-ю строку $\gamma(s)$, и

$$f(s) \doteq \begin{pmatrix} I_r \otimes \varphi(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}.$$

Как несложно увидеть,

$$\begin{aligned} &\operatorname{linr} \gamma(s) \cap \operatorname{linr} f(s) = \\ &= (\operatorname{linr} \gamma_1(s) + \ldots + \operatorname{linr} \gamma_r(s)) \cap \operatorname{linr} f(s) = \\ &\qquad\qquad = \operatorname{linr} \gamma_1(s) \cap \operatorname{linr} f(s) + \ldots + \operatorname{linr} \gamma_r(s) \cap \operatorname{linr} f(s). \end{aligned}$$

Согласно утверждению 6,

$$\operatorname{linr} \gamma_i(s) \cap \operatorname{linr} f(s) = \operatorname{linr} \varphi(s)\gamma_i(s).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\operatorname{linr} \gamma(s) \cap \operatorname{linr} f(s) = \\ &\qquad = \operatorname{linr} \varphi(s)\gamma_1(s) + \ldots + \operatorname{linr} \varphi(s)\gamma_r(s) = \operatorname{linr} \varphi(s)\gamma(s). \end{aligned}$$

Отсюда получаем $\sigma(s) = \varphi(s)\gamma(s)$. Утверждение доказано.

Покажем, что для матриц F (38) и G (40) многообразия $\mathrm{nul}\, G$ и $\mathrm{nul}\, F$ всегда имеют нулевое пересечение, а именно,

Утверждение 9. $\mathrm{nul}\,(\alpha(s), \beta(s)) \cap \mathrm{nul} \begin{pmatrix} I_r \otimes \varphi(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad \text{НОД}(\det \alpha(s), \varphi(s)) = 1.$$

Доказательство. Перепишем левую часть утверждения в равносильной форме:

$$\mathrm{nul} \begin{pmatrix} \alpha(s) & \beta(s) \\ I_r \otimes \varphi(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = 0.$$

Последнее равносильно равенству

$$\mathrm{nul} \begin{pmatrix} \alpha(s) \\ I_r \otimes \varphi(s) \end{pmatrix} = 0. \tag{42}$$

Для выполнения этого равенства достаточно отсутствия общих корней у многочленов $\det \alpha$ и φ^r, т. е. НОД$(\det \alpha, \varphi) = 1$ (см. раздел 10.1.).

Обратно, пусть НОД$(\det \alpha, \varphi) \neq 1$, и λ — общий корень многочленов α и φ:

$$\alpha(\lambda) = 0, \quad \varphi(\lambda) = 0.$$

Тогда

$$\mathrm{nul} \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) \\ I_r \otimes \varphi(\lambda) \end{pmatrix} = \mathrm{nul} \begin{pmatrix} \alpha(\lambda) \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{nul}\, \alpha(\lambda) \neq 0.$$

Следовательно, условие НОД$(\det \alpha(s), \varphi(s)) = 1$ является не только достаточным, но и необходимым. Утверждение доказано.

6. Неуправляемость суммарных систем

Управляемость систем (1), (3), (4) определяется через равносильную запись в форме 1-го порядка:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k, \quad y_k = Cx_k + Du_k, \quad x_1 = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad k = \overline{1, N}. \tag{43}$$

Среди всех равносильных систем вида (43) наименьшей размерностью $n = p_1 + \ldots + p_r$ пространства состояний $\{x_k\}$ обладают только *наблюдаемые* системы ([4], [8]).

Определение 2. Система (43) называется *наблюдаемой*, если любое изменение состояния x_t приводит к изменениям в выходном сигнале $(y_t; y_{t+1}; \ldots)$.

Предложение 4. *Система (43) наблюдаема тогда и только тогда, когда столбцы матрицы $(C; CA; \ldots; CA^{n-1})$ линейно независимы.*

Определение 3. Система (43) называется *управляемой*, если выбором входного сигнала $(u_{t-n}; \ldots; u_{t-1})$ ее можно привести в любое наперед заданное состояние x_t.

Предложение 5. *Система (43) управляема тогда и только тогда, когда строки матрицы $(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ линейно независимы.*

Система (4) называется управляемой, если управляема равносильная ей система (43).

Предложение 6. *Система (4) управляема тогда и только тогда, когда выполнено любое из нижеследующих равносильных условий:*

1) разложение

$$\gamma(s) = \pi(s)\gamma'(s) \tag{44}$$

возможно только с унимодулярной матрицей $\pi(s)$ ($\deg\det\pi(s) = 0$, т.е. определитель $\pi(s)$ не зависит от s);

2) каноническая форма $\mathrm{Sm}\,\gamma(s)$ состоит только из нулей и единиц;

3) матрица $\gamma(s)$ имеет линейно независимые строки для любого $s \in \mathbb{R}$.

Доказательства предложений и ссылки на литературу приведены в [1, раздел 8.5].

Покажем, что суммарные системы всегда неуправляемы.

Теорема 1. *Пусть $G \doteq \gamma \otimes E$, $\gamma \in \mathbb{R}^{r\times t}[s]$, $F \doteq \varphi \otimes E$, $\varphi \in \mathbb{R}^{q\times t}[s]$, $\mathrm{nul}\,G + \mathrm{nul}\,F \neq \mathrm{nul}\,G$, и для суммарного многообразия $\mathrm{nul}\,G + \mathrm{nul}\,F$ существует ненулевое описание S: $\mathrm{nul}\,S = \mathrm{nul}\,G + \mathrm{nul}\,F$. Тогда $S = \sigma \otimes E$, $\sigma \in \mathbb{R}^{p\times t}[s]$, $p \leqslant r$, и многочленная строка σ разлагается в нетривиальное произведение многочленных матриц: $\sigma = \mu\gamma'$, $\mu \in \mathbb{R}^{p\times p}[s]$, $\deg\det\mu > 0$. Другими словами, суммарная система с матрицей $S = \sigma \otimes E$ неуправляема.*

Доказательство. Из утверждения 4 следует $\mathrm{linr}\,\sigma = \mathrm{linr}\,\gamma \cap \mathrm{linr}\,\varphi$. Пересечение $\mathrm{linr}\,\gamma \cap \mathrm{linr}\,\varphi$ представимо в виде суммы

$$\mathrm{linr}\,\gamma \cap \mathrm{linr}\,\varphi = (\mathrm{linr}\,\gamma_1 + \ldots + \mathrm{linr}\,\gamma_r) \cap \mathrm{linr}\,\varphi =$$

$$= \mathrm{linr}\,\gamma_1 \cap \mathrm{linr}\,\varphi + \ldots + \mathrm{linr}\,\gamma_r \cap \mathrm{linr}\,\varphi,$$

где γ_i есть i-я строка γ. Линейное подпространство $\mathrm{linr}\,\gamma_i \cap \mathrm{linr}\,\varphi$ состоит из многочленных строк вида $\rho\gamma_i$, где ρ — многочлен, и $\deg\rho \neq 0$ хотя бы для одного i, иначе $\mathrm{linr}\,\gamma \subseteq \mathrm{linr}\,\varphi$ и $\mathrm{nul}\,G + \mathrm{nul}\,F = \mathrm{nul}\,G$. Отсюда заключаем, что $\sigma = \mu\gamma'$, где γ' есть некоторая подматрица из строк γ, и $\deg\det\mu > 0$, т. е. произведение $\mu\gamma'$ нетривиальное. Теорема доказана.

7. Идентификация параметров уравнений объекта и тренда (решение задачи 3)

Предположим, что вектор наблюдений ς есть случайная величина

$$\varsigma = z_* + \tau_* + \eta,$$

где $\eta \in \mathrm{N}(0, \sigma^2 I)$ — вектор случайных возмущений, и z_*, τ_* — некоторые решения систем $G_\theta z_* = 0$, $F_\theta \tau_* = 0$ с истинными значениями параметров $\theta = \theta_*$.

1. Пусть $\mathcal{N}_L \doteq \{\varsigma_1, \ldots, \varsigma_L\}$ — множество измерений случайной величины ς. Состоятельная оценка $\hat{\theta}$ параметра θ_* по множеству измерений $\mathcal{N}_L$ может быть получена орторегрессионным методом [1, 9, 10, 11] минимизацией квадратичной функции потерь:

$$\hat{\theta} = \arg\min_\theta J(\theta), \qquad J(\theta) = \frac{1}{L}\sum_i J_i(\theta), \qquad J_i(\theta) = \min_{S_\theta \hat{\varsigma}_i = 0} \|\varsigma_i - \hat{\varsigma}_i\|^2, \tag{45}$$

где S_θ — описание для многообразия допустимых значений суммарного сигнала

$$\hat{\varsigma} = \hat{z} + \hat{\tau}, \quad G_\theta \hat{z} = 0, \quad F_\theta \hat{\tau} = 0, \quad \mathrm{nul}\, S_\theta = \mathrm{nul}\, G_\theta + \mathrm{nul}\, F_\theta.$$

Под состоятельностью понимается сходимость п.н. $\hat{\theta} \to \theta_*$ при $L \to \infty$.

Таким образом, для состоятельной идентификации параметров и сигналов объекта и трендов нужно решать задачу 3, то есть по наблюдениям ς находить $\hat{z}$, $\hat{\tau}$ и параметры $\hat{\theta}$, доставляющие минимум мат. ожидания нормы $\|\varsigma - \hat{z} - \hat{\tau}\|^2$ при условии $S_\theta \hat{\varsigma} = 0$, $\hat{\varsigma} = \hat{z} + \hat{\tau}$. Алгоритмы численного решения оптимизационной задачи (45) и программная реализация обсуждались в работах [6, 7]. Существуют различные варианты упрощения задачи (45) с сохранением свойства состоятельности при некотором ухудшении статистических свойств оценок (увеличении асимптотической дисперсии). Статистические свойства упрощенных оценок изучались в [1, 9, 10, 11].

Отметим, что при идентификации орторегрессионным методом не требуется управляемости системы S_θ [1, 9, 10, 11], что принципиально важно для суммарных систем, которые всегда неуправляемы.

2. Рассмотрим условия единственности (идентифицируемости) в задаче (45).

Множество измерений $\mathcal{N}_L$ называется полным, если при нулевой амплитуде возмущений $\sigma^2 = 0$ линейная оболочка $\mathcal{N}_L|_{\sigma^2=0}$ совпадает с $\mathrm{nul}\, S_{\theta_*}$: $\mathrm{lin}\, \mathcal{N}_L|_{\sigma^2=0} = \mathrm{nul}\, S_\theta$. Признак полноты множества измерений в виде условия на ранг некоторой матрицы, составленной из отсчетов ς_i, приведен в [1, 11]. Будем считать измерения полными. В этом случае для единственности состоятельной оценки $\hat{\theta}$ необходимо и достаточно, чтобы параметры θ однозначно вычислялись по многообразию $\mathrm{nul}\, S_\theta$, или, что то же самое, по любому подмножеству $\mathcal{N} \subset \mathrm{nul}\, S_\theta$, полному в смысле соотношения $\mathrm{lin}\, \mathcal{N} = \mathrm{nul}\, S_\theta$. Нетрудно увидеть из условия (iii), что однозначная вычислимость θ по $\mathrm{nul}\, S_\theta$ есть ни что иное, как различимость параметров системы (4), в которой вместо матрицы G_θ подставлена матрица S_θ.

Таким образом, условие единственности состоятельной оценки $\hat{\theta}$ (45), или, другими словами, условие идентифицируемости параметра θ_*, равносильно одновременному выполнению двух условий:

а) условия полноты множества измерений;

б) условия различимости параметров "идеальной" системы (без возмущений).

3. Особенность орторегрессионных методов идентификации состоит в том, что вместе с вычислением оценки $\hat{\theta}$ можно одновременно вычислять оценку суммарного сигнала $\hat{\varsigma} = \Pi\varsigma$ по формулам (30). Как было показано в разделе 4., для однозначного оценивания сигналов объекта $\hat{z}$ и тренда $\hat{\tau}$ как слагаемых суммарного сигнала $\hat{\varsigma}$, необходимо и достаточно выполнения условий разделяемости для пары матриц G_θ и F_θ. Именно эти матрицы входят в формулы отделения трендов (23), (24).

Таким образом, условия разделяемости играют роль только при оценке сигналов $\hat{z}$ и $\hat{\tau}$. При оценке параметров θ условия различимости формулируются в терминах матрицы S_θ суммарной системы, без использования условий разделяемости. Действительно, в примере Б пара матриц G, $F_1 = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes E$ приводит к той же суммарной матрице S, что и пара G, $F_2 = \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix} \otimes E$. В то же время, согласно утверждению 5, при условии НОД$(\alpha, \varphi) = 1$, НОД$(\beta, \varphi) = 1$ пара G, F_1 разделяема, а пара G, F_2 — не разделяема.

4. Перейдем к условиям различимости параметров.

В общем случае условие различимости параметров θ суммарной системы с матрицей S_θ имеет вид:

$$PS_\theta = S_\xi \quad \Rightarrow \quad P = I, \quad \xi = \theta, \tag{46}$$

где $\theta, \xi \in \Omega$ [2, 3, 4, 12]. Левыми умножениями на неособенную матрицу P здесь исчерпываются все допустимые преобразования, сохраняющие множество решений системы [2]. Далее всюду полагаем, что $S_\theta = \sigma_\theta(s) \otimes E$ — клеточно-теплицевая матрица, которая удовлетворяет предположениям (i)–(ii) (с заменой $\gamma_\theta(s)$ на $\sigma_\theta(s)$). Тогда (46) равносильно условию:

$$\rho(s)\sigma_\theta(s) = \sigma_\xi(s) \quad \Rightarrow \quad \rho(s) = I, \quad \xi = \theta, \tag{47}$$

т. е. множество допустимых преобразований в этом случае представимо левыми умножениями $\sigma_\theta(s)$ на многочленные матрицы [2].

Далее будем рассматривать системы с матрицами F и G из примера Г (раздел 5.). Матрица суммарной системы имеет вид (41). Рассмотрим два частных случая:

1. параметры объекта известны, оцениванию подлежат параметры тренда:

$$\sigma_\theta(s) = \varphi_\theta(s)\gamma(s); \tag{48}$$

2. параметры уравнения тренда известны, оцениванию подлежат параметры объекта:

$$\sigma_\theta(s) = \varphi(s)\gamma_\theta(s). \tag{49}$$

Покажем, что в обоих случаях наличие объекта или тренда с известными параметрами не влияет на условия различимости.

7.1. Параметры объекта известны

Для случая (48) условие различимости (47) принимает вид:

$$\rho(s)\varphi_\theta(s)\gamma(s) = \varphi_\xi(s)\gamma(s) \quad \Rightarrow \quad \rho(s) = I, \quad \xi = \theta. \tag{50}$$

Согласно предположениям примера Г, матрица $\gamma(s)$ содержит неособенную подматрицу $\alpha(s)$ из столбцов, и $\varphi_\theta(s)$ — скалярный многочлен. Отсюда следует, что все допустимые (равносильные) преобразования систем (48) исчерпываются умножениями на матрицы

$$\rho(s) = \frac{\varphi_\xi(s)}{\varphi_\theta(s)} I. \tag{51}$$

Далее, согласно условию (ii), размерность пространства решений системы (4) с матрицей $\sigma(s)$ вместо $\gamma(s)$ не зависит от θ, следовательно, в уравнении (50) суммы степеней строк матриц слева и справа от знака равенства одинаковы, и в силу (51) определитель $\det \rho(s)$ не зависит от s. Поэтому имеет место следующее ограничение на множество допустимых преобразований:

$$\frac{\varphi_\xi(s)}{\varphi_\theta(s)} \equiv \text{const} \doteq c \in \mathbb{R}^1, \qquad \rho(s) = cI.$$

Следовательно, в условии (50) левую часть можно заменить равенством

$$\frac{\varphi_\xi(s)}{\varphi_\theta(s)} \equiv \text{const} \doteq c \in \mathbb{R}^1.$$

Окончательно условие различимости принимает вид:

$$c\varphi_\theta(s) = \varphi_\xi(s) \quad \Rightarrow \quad \xi = \theta. \tag{52}$$

Другими словами, для систем (48) проверка различимости сводится к проверке различимости системы $\varphi_\theta(s)$, описывающей тренды.

Поскольку здесь $\varphi_\theta(s) \doteq \varphi_q s^q + \ldots + \varphi_0$ — скалярный многочлен, условие (52) очевидно выполняется, если хотя бы один из коэфициентов φ_i не зависит от θ (фиксирован). Но фиксированность одного из коэффициентов не является необходимым предположением, о чем говорят следующие два примера: 1) $\varphi_\theta(s) \doteq \theta^2 s + \theta$ — все коэффициенты зависят от θ, и условие различимости (52) выполнено в области $\Omega = \{\theta \neq 0\}$; 2) $\varphi_\theta(s) \doteq (\theta+1)s+\theta$ — все коэффициенты зависят от θ, и условие различимости (52) выполнено на всей числовой прямой.

7.2. Параметры уравнения тренда известны

Рассмотрим случай (48). Условие различимости (47) здесь имеет вид:

$$\rho(s)\varphi(s)\gamma_\theta(s) = \varphi(s)\gamma_\xi(s) \quad \Rightarrow \quad \rho(s) = I, \quad \xi = \theta.$$

Относительно матрицы $\gamma_\theta(s)$ пусть верны предположения (i), (ii), и пусть $\varphi(s)$ скалярный многочлен. Тогда имеет место

Теорема 2. *Система (4) с матрицей $\varphi(s)\gamma_\theta(s)$ различима тогда и только тогда, когда различима система (4) с матрицей $\gamma_\theta(s)$.*

Доказательство. 1) Выполним равносильное преобразование системы с переносом сомножителя $\varphi(s)$ слева направо:

Предложение 7. *Пусть $\varphi(s) \in \mathbb{R}^1[s]$, $\gamma(s) \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)}[s]$. Тогда*

(53) $$\varphi(s)\gamma(s) \otimes E_1 = \gamma(s) \otimes \varphi(s) \otimes E_1 = (\gamma(s) \otimes E_2)\,(I_{r+m} \otimes \varphi(s) \otimes E_3)\,,$$

где матрицы $E_{1,2,3}$ имеют вид (18):

$$E_1 \in \mathbb{R}^{(N-p_\gamma-p_\varphi)\times N}, \quad E_2 \in \mathbb{R}^{(N-p_\gamma-p_\varphi)\times(N-p_\varphi)}, \quad E_3 \in \mathbb{R}^{(N-p_\varphi)\times N},$$

$$p_\varphi \doteq \deg\varphi(s), \quad p_\gamma \doteq \max_{i,j}\gamma_{ij}(s), \quad \gamma(s) \doteq \|\gamma_{ij}(s)\|_{j\in\overline{1,r+m}}^{i\in\overline{1,r}}.$$

Доказательство. Нужно применить свойство кронекерова произведения матриц

$$(A\otimes B)\,(C\otimes D) = AC\otimes BD,$$

подставив $A = \gamma(s)$, $B = E_2$, $C = I_{r+m}\otimes\varphi(s)$, $D = E_3$ и учитывая равенство $\gamma(s)\otimes\varphi(s) = \gamma(s)\,(I_{r+m}\otimes\varphi(s))$. Предложение доказано.

2) После переноса сомножителя φ согласно равенству (53) получим равносильную систему:

(54) $$S_\theta\varsigma = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G_\theta F\varsigma = 0,$$

$$S_\theta \doteq \varphi(s)\gamma_\theta(s)\otimes E_1, \qquad G_\theta \doteq \gamma_\theta(s)\otimes E_2, \qquad F \doteq I_{r+m}\otimes\varphi(s)\otimes E_3.$$

Как отмечено выше, различимость параметров системы S_θ есть идентифицируемость S_θ по полному множеству $\mathcal{N}_\varsigma \subset \operatorname{nul} S_\theta$, $\operatorname{lin}\mathcal{N}_\varsigma = \operatorname{nul} S_\theta$. Из равносильности двух систем (54) следует, что различимость параметров системы S_θ равносильна идентифицируемости системы G_θ по множеству $F\mathcal{N}_\varsigma \subset \operatorname{nul} G_\theta$. Если показать, что множество $F\mathcal{N}_\varsigma$ полное, т. е.

$$\operatorname{lin} F\mathcal{N}_\varsigma = F\operatorname{lin}\mathcal{N}_\varsigma = F\operatorname{nul} S_\theta = \operatorname{nul} G_\theta,$$

то будет доказано, что параметры системы S_θ различимы тогда и только тогда, когда различимы параметры системы G_θ. Тем самым, теорема будет доказана.

Предложение 8. *Пусть D, D_A, D_B, — линейные пространства, и определены линейные отображения:*

$$A: \ D \leftarrow D_A, \qquad B: \ D_A \leftarrow D_B, \qquad AB: \ D \leftarrow D_B.$$

Тогда

$$B \operatorname{Ker} AB = \operatorname{Ker} A \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Im} B.$$

Доказательство. Из определений подпространств Ker и Im следует равенство

$$\operatorname{Ker} AB = \operatorname{Ker} B + B^{-1} \left(\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} B \right),$$

где $B^{-1} \left(\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} B \right)$ обозначает полный прообраз подпространства $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} B$ при отображении B. Следовательно,

$$B \operatorname{Ker} AB = 0 + BB^{-1} \left(\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} B \right) = \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} B.$$

Очевидно, равенство $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} A$ равносильно условию $\operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Im} B$. Предложение доказано.

Пусть теперь A — отображение с матрицей G_θ, B — отображение с матрицей F. Тогда

$$\begin{aligned}
&\operatorname{nul} G_\theta = \operatorname{Ker} A, \\
&\operatorname{nul} S_\theta = \operatorname{nul} G_\theta F = \operatorname{Ker} AB, \\
&F \operatorname{nul} S_\theta = B \operatorname{Ker} AB.
\end{aligned}$$

Рассмотрим условия, при которых $F \operatorname{nul} S_\theta = \operatorname{nul} G_\theta$, т. е. $B \operatorname{Ker} AB = \operatorname{Ker} A$. Согласно предложению 8, последнее равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A \subseteq \operatorname{Im} B$, то есть $\operatorname{nul} G_\theta \subseteq \operatorname{im} F$. Последнее вложение выполняется всегда, в силу того что строки матрицы F линейно независимы. Теорема доказана.

8. Заключение

Рассмотрена задача идентификации параметров линейных стационарных систем по измерениям сигналов системы. Измерения содержат аддитивные случайные возмущения и аддитивные тренды. Тренды являются детерминированными функциями — решениями однородных дифференциальных (разностных) уравнений с постоянными коэффициентами. Тренды известны с точностью до начальных условий и параметров своих уравнений. Вместе с параметрами системы оцениваются параметры уравнения трендов и неизвестные начальные условия сигналов системы и трендов.

Основные результаты состоят в следующем:

- Получены условия однозначной восстанавливаемости (разделяемости) сигналов объекта и трендов по измерениям суммарного сигнала; условия выражены в терминах матриц уравнений объекта и трендов.

- Описаны алгоритмы восстановления (разделения) сигналов объекта и трендов.
- Описаны алгоритмы состоятельного оценивания параметров и сигналов объекта и трендов.
- Показано, что оценка параметров объекта и уравнения тренда сводится к идентификации параметров некоторой суммарной системы.
- Описаны алгоритмы построения матриц суммарных систем.
- Показано, что суммарные системы всегда неуправляемы.
- Получены условия идентифицируемости (различимости) параметров тренда и параметров объекта по наблюдениям суммарного сигнала. Отдельно рассмотрены два частных случая:

  1. параметры объекта известны, оцениванию подлежат параметры тренда;
  2. параметры уравнения тренда известны, оцениванию подлежат параметры объекта.

  Показано, что в обоих случаях наличие объекта или тренда с известными параметрами не влияет на условия идентифицируемости.

9. Выражение благодарности

Автор выражает признательность Оргкомитету конференции SICPRO'06 за неоценимую организационную поддержку при подготовке доклада к публикации в сборнике трудов Конференции.

10. Приложение

10.1. Траектории однородных систем

Будем считать, что тренды являются решениями однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Опишем общий вид этих решений [13, гл. 2]. Положим в системе (4) $\beta_i = 0$, $m = 0$. Тогда все решения (траектории) системы имеют вид $z \doteq (y_1; \ldots; y_N)$,

$$y_t = y_{01} P_1 s_1^t + \ldots + y_{0n} P_n s_n^t, \qquad t \in \overline{1, N}, \tag{55}$$

$$n = p_1 + \ldots + p_r = \deg \det \alpha(s),$$

где для $i \in \overline{1, n}$ числа $y_{0i} \in \mathbb{C}$ есть (комплексные) начальные условия, $s_i \in \mathbb{C}$ — корни уравнения $\det \alpha(s) = 0$, векторы $P_i \in \mathbb{R}^r$ вычисляются из уравнений $\alpha(s_i) P_i = 0$ и нормируются каким-либо способом, например, $\|P_i\| = 1$. В случае, если корень s_i имеет кратность $k \geqslant 2$, будем считать, что совпадают корни $s_i = s_{i+1} = \ldots = s_{i+k-1}$, и тогда у соответствующих слагаемых суммы (55) появляются сомножители — многочлены от t степени от нуля до $k-1$:

$$(56)\qquad \left(y_{0,i}P_i + y_{0,i+1}P_{i+1}t + \ldots + y_{0,i+k-1}P_{i+k-1}t^{k-1}\right) s_i^t.$$

В качестве векторов $P_i, \ldots, P_{i+k-1}$ в этом случае выбирается нормированный базис подпространства $\operatorname{nul}\alpha(s_i)$.

В силу того, что уравнение (4) имеет действительные коэффициенты, комплексные корни являются сопряженными в парах $s_j \doteq a+ib$, $s_{j+1} \doteq a-ib$. Поскольку речь идет только о действительных решениях, то начальные условия $y_{0,i}$ в линейных комбинациях (55) и (56) при действительных корнях s_i должны быть действительными, а при комплексных сопряженных корнях s_j и s_{j+1} — сопряженными: $y_{0,j} = \overline{y_{0,j+1}}$. В последнем случае два парных слагаемых j и $j+1$ в сумме (55) дают траекторию

$$A\varrho^t \cos\left(\omega t + \varphi\right), \qquad \varrho \doteq \sqrt{a^2+b^2}, \qquad z \doteq \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Это решение определено с точностью до чисел

$$A = A\left(y_{0,j}, y_{0,j+1}\right), \quad \varphi = \varphi\left(y_{0,j}, y_{0,j+1}\right).$$

Соответствующая парам сопряженных корней часть многочлена имеет вид $(s-s_j)(s-s_{j+1}) = (s^2 - 2\rho\cos\omega\cdot s + \rho^2)$.

Траектории вида

$$z \doteq (y_1; \ldots; y_N), \qquad y_t = Ps^t = Pe^{t\ln s}, \qquad P \in \mathbb{R}^r,$$

являются показательными функциями времени t с основанием s или экспонентами с показателем $t\ln s$. Ввиду этого линейные комбинации (55) можно называть экспоненциальными траекториями. Слагаемые вида (56) при кратных корнях называются квазимногочленами.

Рассмотрим системы

$$(57)\qquad \alpha_p y_{k+p} + \ldots + \alpha_0 y_k = 0, \qquad k \in \overline{1, N-p},$$

коэффициенты $\alpha_i \in \mathbb{R}^{q\times r}$ которых имеют число строк больше, чем число столбцов: $q > r$ (“вертикальные” матрицы). Кратко опишем возникающие здесь особенности. Обозначим $\pi(s)$ произведение инвариантных многочленов $\alpha(s)$. Согласно определению инвариантных многочленов [5], $\pi(s)$ есть наибольший общий делитель миноров порядка r в $\alpha(s)$. Условимся, что $\alpha(s)$ имеет полный нормальный ранг, то есть $\pi(s) \neq 0$.

Предложение. *Все решения систем с “вертикальными” матричными коэффициентами описываются формулами* (55) *с заменой* $\det\alpha(s)$ *на* $\pi(s)$.

10.2. Квазиоднородные решения системы (4).

Определение. Пусть $\varphi(s) \in \mathbb{R}^1[s]$ — некоторый многочлен. Решения системы (4), которые удовлетворяют условию $(I_{r+m} \otimes \varphi(s) \otimes E)\, z = 0$, называем *квазиоднородными*.

Другими словами, решение z системы (4), записанное с упорядочиванием компонент согласно (17), будет квазиоднородным тогда и только тогда, когда каждая из $r+m$ компонент $\upsilon^{[i]} \doteq \left(\upsilon_1^{[i]};\ldots;\upsilon_N^{[i]}\right)$, $i \in \overline{1,r+m}$, является решением однородной системы $(\varphi(s)\otimes E)\,\upsilon^{[i]} = 0$.

Множество квазиоднородных решений системы (4) есть пересечение

$$\mathrm{nul}\,(\gamma(s)\otimes E) \cap \mathrm{nul}\,(I_{r+m}\otimes\varphi(s)\otimes E)\,.$$

Заметим, что для нетривиального расширения множества решений неоднородной системы (4) однородными трендами из множества $\mathrm{nul}\,(I_{r+m}\otimes\varphi(s)\otimes \otimes E)$ достаточно прибавлять не все множество трендов $\mathrm{nul}\,(I_{r+m}\otimes\varphi(s)\otimes E)$, а разницу между множеством трендов и множеством квазиоднородных решений.

Опишем множество квазиоднородных решений системы (4) для заданного многочлена $\varphi(s)$. Сначала рассмотрим случай отсутствия кратных корней:

$$\varphi(s) = (s-\varphi_1)\ldots(s-\varphi_k)\,,\quad k = \deg\varphi(s).$$

Пусть Φ — матрица Вандермонда, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений однородной системы $(\varphi(s)\otimes E)\,\upsilon = 0$, $\upsilon\in\mathbb{R}^N$:

$$\Phi = (\varphi(s)\otimes E)_\perp = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_k \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^N & \cdots & \varphi_k^N \end{pmatrix},\qquad \upsilon = \Phi c,\quad c\in\mathbb{R}^k.$$

Обозначим $\gamma(s) \doteq \|\gamma_{ij}(s)\| \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)}$. Действие оператора сдвига $s\otimes E$ на матрицу Φ приводит к умножению Φ справа на некоторую диагональную матрицу:

$$(s\otimes E)\,\Phi = \Phi \begin{pmatrix} \varphi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_k \end{pmatrix} \doteq \Phi D_\varphi. \tag{58}$$

Как следствие, действие оператора $\gamma_{ij}(s)\otimes E = \gamma_{ij}(s\otimes E)$ на однородную траекторию $\upsilon = \Phi c$ выражается равенством

$$(\gamma_{ij}(s\otimes E))\,\Phi c = \Phi\gamma_{ij}(D_\varphi)c. \tag{59}$$

Решение (17) системы (4) является квазиоднородным, если $\upsilon^{[i]} = \Phi c_i$, $i\in \overline{1,r+m}$. Выпишем условия, которые налагает на векторы c_i уравнение (4):

$$\left\{\begin{array}{c} \gamma_{11}(s\otimes E)\Phi c_1 + \ldots + \gamma_{1,r+m}(s\otimes E)\Phi c_{r+m} = 0, \\ \cdots \\ \gamma_{r1}(s\otimes E)\Phi c_1 + \ldots + \gamma_{r,r+m}(s\otimes E)\Phi c_{r+m} = 0. \end{array}\right. \tag{60}$$

В силу соотношения (59) и линейной независимости столбцов матрицы Φ получаем систему уравнений

$$\left\{\begin{array}{c} \gamma_{11}(D_\varphi)c_1 + \ldots + \gamma_{1,r+m}(D_\varphi)c_{r+m} = 0, \\ \cdots \\ \gamma_{r1}(D_\varphi)c_1 + \ldots + \gamma_{r,r+m}(D_\varphi)c_{r+m} = 0, \end{array}\right. \tag{61}$$

или, в матричном виде

$$\gamma(D_\varphi)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{r+m} \end{pmatrix} = 0. \tag{62}$$

Обозначим $c_i \doteq (c_{i1}; \dots; c_{ik}) \doteq c_{i*}$. Составим векторы $c_{*j} \doteq (c_{1j}; \dots; c_{r+m,j})$. Уравнение (62) заменим равносильным

$$\begin{pmatrix} \gamma(\varphi_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma(\varphi_k) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{*1} \\ \vdots \\ c_{*k} \end{pmatrix} = 0. \tag{63}$$

Выделим в $\gamma(s)$ неособенную подматрицу $\alpha(s)$ из столбцов, остаток обозначим $\beta(s)$: $\gamma(s) \doteq (\alpha(s), \beta(s))$. В системе (63) левую часть каждого из уравнений вида $\gamma(\varphi_j)c_{*j} = 0$ представим как сумму двух слагаемых:

$$\begin{aligned} \gamma(\varphi_j)c_{*j} = (\alpha(\varphi_j), \beta(\varphi_j))\begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{r+m,j} \end{pmatrix} = \\ = \alpha(\varphi_j)\begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{rj} \end{pmatrix} + \beta(\varphi_j)\begin{pmatrix} c_{r+1,j} \\ \vdots \\ c_{r+m,j} \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \tag{64}$$

Условимся, что многочлены $\det \alpha(s)$ и $\varphi(s)$ взаимно просты, тогда числовые матрицы $\alpha(\varphi_1), \dots, \alpha(\varphi_k) \in \mathbb{R}^{r\times r}$ все неособенные. Из уравнения (64) следует, что вектор коэффициентов $(c_{1j}; \dots; c_{r,j}) \doteq a_j$ однозначно выражается через вектор $(c_{r+1,j}; \dots; c_{r+m,j}) \doteq b_j$:

$$a_j = -\alpha(\varphi_j)^{-1}\beta(\varphi_j)b_j.$$

Окончательно получаем следующую связь между амплитудами c_{ij} компонент квазиоднородных траекторий системы (4):

$$\begin{aligned} &\left(c_{11}; \;\dots;\; c_{r1}; \;\dots;\; c_{1k} \;\dots;\; c_{rk} \right) \doteq \\ &\doteq \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha(\varphi_1)^{-1}\beta(\varphi_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\alpha(\varphi_k)^{-1}\beta(\varphi_k) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} \doteq \\ &\doteq \begin{pmatrix} -\alpha(\varphi_1)^{-1}\beta(\varphi_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\alpha(\varphi_k)^{-1}\beta(\varphi_k) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_{r+1,1} \\ \vdots \\ c_{r+m,1} \\ \vdots \\ c_{r+1,k} \\ \vdots \\ c_{r+m,k} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь допустим существование кратных корней у многочлена $\varphi(s)$. Пусть $\varphi(s) = (s-\varphi_1)^{k_1}\dots(s-\varphi_l)^{k_l}$, $k_1+\dots+k_l = k = \deg\varphi(s)$. В этом случае матрица Φ, столбцы которой образуют фундаментальную систему решений, имеет вид:

$$\Phi \doteq \begin{pmatrix} \Phi_1 & \dots & \Phi_l \end{pmatrix},$$

$$\Phi_j \doteq \begin{pmatrix} \varphi_j & \varphi_j & \dots & \varphi_j \\ \varphi_j^2 & 2\varphi_j^2 & \dots & 2^{k_j-1}\varphi_j^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_j^N & N\varphi_j^N & \dots & N^{k_j-1}\varphi_j^N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times k_j}, \quad j \in \overline{1,l}.$$

Действие оператора сдвига $s\otimes E$ на Φ_j приводит к умножению справа на верхне-треугольную матрицу c_n^m из биномиальных коэффициентов:

$$c_n^m \doteq \begin{cases} \frac{n!}{m!(n-m)!}, & n \geqslant m, \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

$$(s\otimes E)\,\Phi_j = \Phi_j\left(\varphi_j B_{k_j}\right), \qquad B_n \doteq \|b_{ij}\|_{j=1,n}^{i=1,n}, \quad b_{ij} = c_{j-1}^{i-1}.$$

Для случаев $n = 1,2,3,4$ матрицы B_n имеют вид:

$$B_1 = 1, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Как следствие, уравнение (58) переходит в уравнение

$$(65) \qquad (s\otimes E)\,\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 & \dots & \Phi_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 B_{k_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_l B_{k_l} \end{pmatrix} \doteq \Phi D_\varphi.$$

Уравнения (59)–(62) по форме остаются теми же, что и в случае некратных корней, но диагональная матрица D_φ заменяется клеточно-диагональной, как показано выше в уравнении (65). Итак,

$$(66) \qquad \gamma(D_\varphi)\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_{r+m} \end{pmatrix} = 0.$$

Обозначим $c_i \doteq (c_{i1};\dots;c_{il}) \doteq c_{i*}$, $i = \overline{1,r+m}$. Обратим внимание, что здесь элементы c_{ij} уже являются векторами размерности $k_j \geqslant 1$, а не просто числами, как было в случае некратных корней. Составим векторы

$$c_{*j} \doteq (c_{1j};\dots;c_{r+m,j}) \in \mathbb{R}^{(r+m)k_j}, \quad j = \overline{1,l}.$$

Заметим, что $\gamma(\varphi_j B_{k_j})$ есть матрица размерности $rk_j \times (r+m)k_j$. Уравнение (66) заменим равносильным

$$\begin{pmatrix} \gamma(\varphi_1 B_{k_1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma(\varphi_l B_{k_l}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{*1} \\ \vdots \\ c_{*l} \end{pmatrix} = 0. \tag{67}$$

В системе (67) левую часть каждого из уравнений вида $\gamma(\varphi_j B_{k_j})c_{*j} = 0$ представим как сумму двух слагаемых:

$$\gamma(\varphi_j B_{k_j})c_{*j} = \alpha(\varphi_j B_{k_j}) \begin{pmatrix} c_{1j} \\ \vdots \\ c_{rj} \end{pmatrix} + \beta(\varphi_j B_{k_j}) \begin{pmatrix} c_{r+1,j} \\ \vdots \\ c_{r+m,j} \end{pmatrix} = 0. \tag{68}$$

По условию, многочлены $\det \alpha(s)$ и $\varphi(s)$ взаимно просты, тогда числовые матрицы $\alpha(\varphi_1 B_{k_1}), \ldots, \alpha(\varphi_l B_{k_l})$ все неособенные. Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить простые соотношения:

$$\left(\varphi_j B_{k_j}\right)^p = \varphi_j^p \left(B_{k_j}\right)^p = \varphi_j^p \begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_j^p & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_j^p \end{pmatrix} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \alpha(\varphi_j B_{k_j}) = \begin{pmatrix} \alpha(\varphi_j) & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha(\varphi_j) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{rk_j \times rk_j}.$$

Из уравнения (68) следует, что вектор коэффициентов $(c_{1j}; \ldots; c_{r,j}) \doteq a_j$ однозначно выражается через вектор $(c_{r+1,j}; \ldots; c_{r+m,j}) \doteq b_j$:

$$a_j = -\alpha(\varphi_j B_{k_j})^{-1} \beta(\varphi_j B_{k_j}) b_j.$$

Окончательно получаем следующую связь между амплитудами c_{ij} компонент квазиоднородных траекторий системы (4):

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} c_{11}; & \ldots; & c_{r1}; & \ldots; & c_{1l} & \ldots; & c_{rl} \end{pmatrix} \doteq \\
&\doteq \begin{pmatrix} a_1; & \ldots; & a_l \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -\alpha(\varphi_1 B_{k_1})^{-1}\beta(\varphi_1 B_{k_1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\alpha(\varphi_l B_{k_l})^{-1}\beta(\varphi_l B_{k_l}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_l \end{pmatrix} \doteq \\
&\doteq \begin{pmatrix} -\alpha(\varphi_1 B_{k_1})^{-1}\beta(\varphi_1 B_{k_1}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\alpha(\varphi_l B_{k_l})^{-1}\beta(\varphi_l B_{k_l}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{r+1,1} \\ \vdots \\ c_{r+m,1} \\ \vdots \\ c_{r+1,l} \\ \vdots \\ c_{r+m,l} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

В результате доказано следующее

Утверждение 10. *Для произвольного заданного многочлена*

$$\varphi(s) = (s-\varphi_1)^{k_1} \dots (s-\varphi_l)^{k_l}$$

множество решений z системы (4), (17):

$$Gz = 0, \qquad G = \gamma(s) \otimes E \in \mathbb{R}^{r(N-p)\times(r+m)N},$$

содержит квазиоднородные решения

$$z = (\Phi c_1; \dots; \Phi c_{r+m}), \qquad \Phi \doteq (\varphi(s) \otimes E)_{\perp},$$

в которых m векторных коэффициентов $c_{i_{r+1}}, \dots, c_{i_{r+m}}$ произвольные, а остальные r коэффициентов $c_{i_1}, \dots, c_{i_r}$ вычисляются через $c_{i_{r+1}}, \dots, c_{i_{r+m}}$. Номера $i_1, \dots, i_r$ зависимых (вычисляемых) коэффициентов есть номера столбцов $\gamma(s)$, образующих неособенную подматрицу.

Это утверждение есть обобщение утверждения 9 работы [1] на случай $r > 1$, $m > 1$.

Следствие. $\operatorname{nul}(\alpha(s), \beta(s)) + \operatorname{nul}\begin{pmatrix} I_r \otimes \varphi(s) & 0 \\ 0 & I_m \otimes \varphi(s) \end{pmatrix} =$

$$= \operatorname{nul}(\alpha(s), \beta(s)) + \operatorname{nul}\begin{pmatrix} I_r \otimes \varphi(s) & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix}. \tag{69}$$

Другими словами, чтобы получить суммарное многообразие, составленное из решений неоднородной системы $\operatorname{nul}((\alpha(s), \beta(s)) \otimes E)$ и многообразия однородных трендов $\operatorname{nul}(I_{r+m} \otimes \varphi(s) \otimes E)$, достаточно прибавлять не все множество трендов, а разницу между множеством трендов и множеством квазиоднородных решений

$$\operatorname{nul}((\alpha(s), \beta(s)) \otimes E) \cap \operatorname{nul}(I_{r+m} \otimes \varphi(s) \otimes E).$$

Эта разница и есть второе слагаемое в правой части равенства (69). Данное следствие обобщает утверждение 10 работы [1].

Список литературы

1. Ломов А.А. Орторегрессионные методы оценивания параметров и задачи отделения трендов в линейных системах // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2005. № 2. С. 1–86. (Электронный журнал http://www.neva.ru/journal). (http://www.academ.org/~lhome/lomov-neva-2005.pdf).
2. Ломов А.А. Условия различимости стационарных линейных систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 2. С. 261–266.
3. Ломов А.А. О различимости стационарных линейных систем с коэффициентами, зависящими от параметра // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6. № 4(16). С. 60–66.
4. Ломов А.А. Минимальные описания стационарных линейных моделей // Труды Института математики СО РАН. Т.28, Модели и методы оптимизации. С. 91-117. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1994.
5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1988.
6. Егоршин А.О. Метод наименьших квадратов и "быстрые" алгоритмы в вариационных задачах идентификации и фильтрации (метод ВИ) // Автометрия. 1988. № 1. С. 30–42.
7. Ломов А.А. Идентификация линейных динамических систем по коротким участкам переходных процессов при аддитивных измерительных возмущениях // Известия РАН ТиСУ. 1997. № 3. С. 20–26.
8. Kalman R.E. Mathematical Description of Linear Dynamical Systems // SIAM Journal of Control. 1963. Ser.A. Vol. 1. No. 2. P. 152–192.
9. Ломов А.А. О статистических свойствах оценок параметров линейных динамических систем по измерениям коротких участков переходных процессов // Труды III Международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO '04. Москва, 28-30 января 2004 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2004. С. 209–224.
10. Ломов А.А. Сравнение методов оценивания параметров линейных динамических систем по измерениям коротких участков переходных процессов // Автоматика и телемеханика. 2005. № 3. С. 39–47.
11. Ломов А.А. Орторегрессионные оценки параметров систем линейных разностных уравнений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. 8. № 3(23). С. 102–119.
12. Lomov A.A. Correct Parametrizations of Linear Models // SibAM. 1994. Vol. 4. No. 1. P. 95–113.
13. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974.