УДК 681.5.015

ОЦЕНКА ТРЕНДОВ И ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИКИ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ НАБЛЮДЕНИЯ*

© 2007 г. А.А. Ломов

Новосибирск, ИМ СО РАН, НГУ

Поступила в редакцию 1.07.07 г.

Аннотация

Предложены формулы оценки тренда временного ряда по измерениям отсчетов суммарного процесса "ряд плюс тренд" с аддитивными случайными возмущениями в измерениях. Динамика ряда и тренда описывается линейными разностными уравнениями заданного порядка. Оценивание производится по ансамблю измерений коротких отрезков суммарного процесса (не длиннее переходных характеристик). Предложены методы идентификации параметров уравнений и процессов ряда и тренда по измерениям суммарного процесса.

Введение

Задача оценки тренда временного ряда возникает в связи с широким кругом проблем прогнозирования процессов в экономике, медицине, природопользовании, в технических системах [1, 2]. Актуальны задачи оценки тренда по ансамблю измерений коротких отрезков ряда (не длиннее переходных характеристик). Подход, основанный на применении дробно-рациональных фильтров, приводит здесь к ряду проблем, связанных с неизвестными начальными условиями фильтров [3]. В статьях [4, 5, 6] был предложен метод выделения тренда, основанный на оценивании неизвестных начальных условий процессов. При этом предполагалось, что известны линейные разностные уравнения, описывающие ряд и тренд. В настоящей статье делается переход к случаю, когда известны

*Работа выполнена при финансовой поддержке Росссийского фонда фундаментальных исследований (проект № 06–01–00776).

только порядки уравнений ряда и тренда, а коэффициенты неизвестны. Другими словами, рассматривается задача совместной оценки (идентификации) начальных условий и параметров уравнений ряда и тренда. Предварительные результаты опубликованы в [4] и [7].

Для совместной идентификации параметров уравнений и начальных условий процессов возможно использование модификаций фильтра Калмана с расширенным вектором состояния [8, 9]. Для этого идентифицируемая система уравнений записывается в форме 1-го порядка с переменными состояния, в число которых включаются оцениваемые параметры. Отмечается, что сходимость алгоритмов фильтра сильно зависит от начального приближения по параметрам [10]. Это становится препятствием для эффективных вычислений в реальном времени, в нелабораторных условиях.

Альтернативный подход, рассматриваемый в статье, предполагает запись идентифицируемых уравнений в форме высокого порядка $p \geqslant 1$ без переменных состояния и затем совместную идентификацию параметров уравнения и начальных условий вариационными (орторегрессионными) методами [11, 12, 13, 14]. К семейству вариационных методов принадлежит известный метод ортогональной регрессии (ОР) и его разновидности [14, 15, 16, 17, 18, 19]. Отличительной особенностью методов этого семейства является возможность идентификации параметров уравнений численными процедурами с малым числом итераций и большим радиусом сходимости [12, 17, 20], что позволяет проводить вычисления в реальном времени.

1 Уравнения для процессов ряда и тренда

Пусть $z \in \mathbb{R}^{nN}$ — отрезок временного ряда: $z = (z[1]; \ldots; z[N])$, $z[k] \in \mathbb{R}^n$. Здесь и далее применяется обозначение $(X; Y) \doteq \binom{X}{Y}$. Наблюдается суммарный процесс $\check{s} = z + f + \eta$, где $f \in \mathbb{R}^{nN}$ — тренд, и

$\eta \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I_{nN})$ — стохастические возмущения с нормальным распределением. Процессы z и f описываются разностными уравнениями[1]:

$$\gamma_p z[k+p] + \ldots + \gamma_0 z[k] = 0, \quad k \in \overline{1, N-p}, \tag{1.1}$$

$$\tau_q f[k+q] + \ldots + \tau_0 f[k] = 0, \quad k \in \overline{1, N-q}, \tag{1.2}$$

$$\gamma_i \in \mathbb{R}^{r \times n}, \quad \tau_i \in \mathbb{R}^{r_1 \times n}.$$

В матричной записи уравнения процессов имеют вид

$$Gz = 0, \quad Tf = 0, \tag{1.3}$$

где G и T — блочно теплицевые матрицы размеров соответственно $r(N-p) \times nN$ и $r_1(N-q) \times nN$:

$$G = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_p & & & 0 \\ & \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_p & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_p \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \ldots & \tau_q & & & 0 \\ & \tau_0 & \tau_1 & \ldots & \tau_q & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & & \tau_0 & \tau_1 & \ldots & \tau_q \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты уравнений γ_i, τ_i зависят от векторного параметра θ в открытой области $\theta \in \Omega \subset \mathbb{R}^v$: $G \doteq G_\theta$, $T \doteq T_\theta$. В уравнениях (1.1)–(1.3) значение θ фиксировано.

Введем многочленные матрицы

$$\gamma(\varsigma) \doteq \gamma_p \varsigma^p + \gamma_{p-1} \varsigma^{p-1} + \ldots + \gamma_0,$$

$$\tau(\varsigma) \doteq \tau_q \varsigma^q + \tau_{q-1} \varsigma^{q-1} + \ldots + \tau_0.$$

Будем обозначать $G \sim \gamma(\varsigma)$ и $T \sim \tau(\varsigma)$.

Введем числовые матрицы

$$\gamma_\theta \doteq \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \ldots & \gamma_p \end{pmatrix}_\theta \in \mathbb{R}^{r \times n(p+1)},$$

$$\tau_\theta \doteq \begin{pmatrix} \tau_0 & \tau_1 & \ldots & \tau_q \end{pmatrix}_\theta \in \mathbb{R}^{r_1 \times n(q+1)}.$$

Сформулируем условия на вид зависимости $\theta \mapsto \gamma_\theta$.

Предположим:

[1] При $n > r$ и $n > r_1$ эти уравнения являются неоднородными, см. ниже замечание 2.

(i) Соответствие $\theta \mapsto \gamma_\theta$ взаимно однозначно[2] в области $\theta \in \Omega$.

(ii) Для каждого $\theta \in \Omega$:

а) строки многочленной матрицы $\gamma_\theta(\varsigma)$ линейно независимы;

б) $\gamma_\theta(\varsigma)$ имеет наименьшую сумму степеней строк среди всех лево-эквивалентных[3] $\gamma_\theta(\varsigma)$ матриц, т. е. $\gamma_\theta(\varsigma)$ *собственна по строкам*;

в) числовая матрица $\gamma_0 = \gamma_\theta(0)$ имеет линейно независимые строки, т. е. $\gamma_\theta(\varsigma)$ *двусторонне собственна по строкам* [24, с. 48].

(iii) Сумма $d(\gamma) = d_1(\gamma) + \ldots + d_r(\gamma)$ степеней строк $\gamma_\theta(\varsigma)$ одинакова для всех $\theta \in \Omega$.

Таким же условиям (i)–(iii) подчиним зависимость $\theta \mapsto \tau_\theta$ (с формальной заменой символа γ на τ).

Замечание 1. Условия (i)–(iii) не накладывают ограничений на устойчивость и управляемость системы. Это является принципиальным моментом, поскольку далее будут рассматриваться методы идентификации параметров уравнений суммарных процессов, которые всегда неуправляемы (теорема 1). Кроме того, в качестве исходных данных для идентификации будут выступать наблюдения коротких отрезков переходных процессов, не связанных между собой во времени. Это позволяет не ставить условий на устойчивость системы.

Замечание 2. Уравнение (1.1) при $n > r$ соответствует неоднородному разностному уравнению

$$\alpha_p y[k+p] + \ldots + \alpha_0 y[k] = \beta_p u[k+p] + \ldots + \beta_0 u[k], \quad k \in \overline{1, N-p}, \tag{1.4}$$

$$\gamma_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}^{r\times r}, \quad \beta_i \in \mathbb{R}^{r\times m},$$

$$z[k] = (y[k]; -u[k]), \quad y[k] \in \mathbb{R}^r, \quad u[k] \in \mathbb{R}^m.$$

[2]В ряде случаев (например, для установления ранговых критериев различимости параметра θ) может быть наложено дополнительное условие сильной дифференцируемости отображения $\theta \mapsto \gamma_\theta$ в смысле Фреше [21, 22].

[3]т. е. получаемых левыми умножениями на матрицы элементарных преобразований [23].

Разделение переменных $z[k]$ на выходные $y[k]$ (зависимые) и входные $u[k]$ (независимые переменные правой части) ограничено только одним условием: соответствующая выходу $y[k]$ подматрица $\alpha(\varsigma)$ должна быть неособенной. То же касается и уравнений (1.2), (2.2).

2 Уравнения для суммарных процессов

Для идентификации параметров уравнений ряда и тренда (1.1), (1.2) по наблюдениям суммы $\check{s}$ необходимо построить уравнение для суммарного процесса $s \doteq z + f$:

$$Ps = 0. \tag{2.1}$$

Будем исходить из уравнений $Gz = 0$ и $Tf = 0$ для процессов z и f. Матрица P определяется из условия $\operatorname{nul} P = \operatorname{nul} G + \operatorname{nul} T$, где $\operatorname{nul} P$ обозначает правое нуль-пространство P, т. е. множество всех решений системы линейных уравнений с матрицей P. Существенно, что если матрицы G и T блочно теплицевые, то матрицу P также можно выбрать в блочно теплицевом виде, т. е. сопоставить ей некоторый матричный многочлен $\pi(\varsigma) \sim P$, как и для матриц G и T.

Утверждение 1. *Если матрицы G и T блочно теплицевые с одинаковыми числами столбцов и блочных столбцов, то всегда можно подобрать блочно теплицевую матрицу P такую, что* $\operatorname{nul} P = \operatorname{nul} G + \operatorname{nul} T$.

Доказательство приведено в приложении.

Обозначим

$$\pi(\varsigma) \doteq \pi_l \varsigma^l + \pi_{l-1}\varsigma^{l-1} + \ldots + \pi_0,$$
$$\pi_\theta \doteq \begin{pmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \ldots & \pi_l \end{pmatrix}_\theta \in \mathbb{R}^{r_2 \times n(l+1)}.$$

Зависимость $\theta \to \pi_\theta$ подчиним условиям (i)–(iii) с формальной заменой γ на π. Суммарный процесс s описывается уравнениями

$$\pi_l s[k+l] + \ldots + \pi_0 s[k] = 0, \quad k \in \overline{1, N-l}, \tag{2.2}$$

в которых матричные коэффициенты π_i определяются исходя из известных коэффициентов γ_i и τ_i.

Суммарные системы (2.2) обладают одним важным свойством — они всегда неуправляемы. Это существенно сужает класс методов, применимых для идентификации параметров суммарных систем. Сформулируем утверждение.

Пусть $s[k] = (s_{\text{out}}[k]; s_{\text{in}}[k])$ — разделение $s[k]$ на зависимые (out) и независимые (in) переменные согласно замечанию 2. Введем равносильную системе (2.2) систему в форме 1-го порядка:

$$s_{\text{out}}[k] = Cx[k] + Ds_{\text{in}}[k], \quad x[k+1] = Ax[k] + Bs_{\text{in}}[k], \tag{2.3}$$
$$x[k] \in \mathbb{R}^{d(\pi)}, \quad k = \overline{1, N}.$$

Определение 1. Система (2.3) называется *управляемой*, если выбором независимых переменных $(s_{\text{in}}[t-d(\pi)]; \ldots; s_{\text{in}}[t-1])$ ее можно привести в любое наперед заданное состояние $x[t]$. Система (2.2) называется управляемой, если управляема равносильная ей система (2.3).

Предложение 1. *Система* (*2.2*) *управляема тогда и только тогда, когда разложение*

$$\pi(s) = u(s)\pi'(s) \tag{2.4}$$

возможно только с унимодулярной матрицей $u(s)$
(*т. е.* $\deg\det u(s) = 0$).

Доказательство. См. [4, раздел 8.5], [25, раздел 8.2].

Теорема 1. *Пусть* P, G, T *— блочно теплицевые матрицы такие, что* $\operatorname{nul} P = \operatorname{nul} G + \operatorname{nul} T$. *Тогда система* (2.2), *соответствующая матрице* $\pi(\varsigma) \sim P$, *неуправляема.*

Доказательство приведено в приложении.

3 Идентификация параметров уравнений и оценка процессов ряда и тренда

Пусть дано множество наблюдений $\left\{\check{s}_{(1)}, \ldots, \check{s}_{(L)}\right\} \subset \mathbb{R}^{nN}$:

$$\check{s}_{(i)} = z_{*(i)} + f_{*(i)} + \eta_{(i)}, \quad i \in \overline{1, L}, \tag{3.1}$$

где $\eta_{(i)} \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I_{nN})$ — независимые одинаково распределенные возмущения. Величины $z_{*(i)}$, $f_{*(i)}$ являются решениями уравнений (1.3) с заранее не известными значениями параметров $\theta = \theta_*$: $G_{\theta_*} z_{*(i)} = 0$, $T_{\theta_*} f_{*(i)} = 0$.

Задача 1. Построить оценку $\hat{\theta}(\check{s}_{(1)}, \ldots, \check{s}_{(L)})$ параметра θ_*, состоятельную в смысле сходимости п. н.[4] $\hat{\theta} \to \theta_*$ при $L \to \infty$.

Задача 2. Пусть $z_{*(1)} = \ldots = z_{*(L)} = z_*$, $f_{*(1)} = \ldots = f_{*(L)} = f_*$. Построить оценки $\hat{\theta}$, $\hat{z}$ и $\hat{f}$, состоятельные в смысле сходимости п. н. $\hat{\theta} \to \theta_*$, $\hat{z} \to z_*$, $\hat{f} \to f_*$ при $L \to \infty$.

Рассмотрим задачу 1. Известно, что она может быть решена одним из орторегрессионных методов [12, 13, 14, 17]. При идентификации орторегрессионным методом не требуется управляемости (и устойчивости) системы (2.2) [4, 14, 26]. Этот фактор является решающим ввиду того, что необходимо идентифицировать системы, описывающие суммарные процессы, а такие системы неуправляемы (теорема 1).

Орторегрессионные оценки получаются из оценок максимального правдоподобия заменой неизвестных распределений компонент процессов

$$s_{*(i)} = z_{*(i)} + f_{*(i)}$$

равномерными распределениями на больших интервалах. Задача поиска оценки $\hat{\theta}$ сводится к минимизации функции потерь:

$$\hat{\theta} = \arg\min_{\theta} J(\theta), \qquad J(\theta) = \frac{1}{L} \sum_{i} J_{(i)}(\theta), \tag{3.2}$$

[4]"Почти наверное", с вероятностью 1.

$$J_{(i)}(\theta) \doteq \left\|\check{s}_{(i)} - \hat{s}_{(i)}\right\|^2 \doteq \min_{P_\theta s_{(i)}=0} \left\|\check{s}_{(i)} - s_{(i)}\right\|^2 .$$

Здесь $P_\theta s_{(i)} = 0$ — уравнение для суммарного процесса $s_{(i)} = z_{(i)} + f_{(i)}$.

Алгоритмы эффективного численного решения оптимизационной задачи (3.2) опубликованы в [12, 13]. Программная реализация обсуждалась в [20].

Существуют различные варианты упрощения оценок (3.2) с сохранением свойства состоятельности при некотором ухудшении статистических свойств (увеличении асимптотической дисперсии)[5] [4, 14, 26].

Решение задачи 2. Сначала нужно получить оценку $\hat{\theta}$, т. е. решить задачу 1 в частном случае $z_{*(i)} = z_*$, $f_{*(i)} = f_*$:

$$\hat{\theta} = \arg\min_\theta J(\theta), \qquad J(\theta) = \min_{P_\theta s=0} \frac{1}{L} \sum_i \left\|\check{s}_{(i)} - s\right\|^2 . \tag{3.3}$$

Для полученного значения $\hat{\theta}$ вычисляется оценка $\hat{s}$ и соответствующее значение функции потерь:

$$J(\hat{\theta}) = \frac{1}{L} \sum_i \left\|\check{s}_{(i)} - \hat{s}\right\|^2 ,$$

$$\hat{s} = \arg\min_{P_{\hat{\theta}} s=0} \frac{1}{L} \sum_i \left\|\check{s}_{(i)} - s\right\|^2 . \tag{3.4}$$

Решение минимизационной задачи (3.4) имеет вид [6, 12, 13]:

$$\hat{s} = \Pi_{\hat{\theta}} \check{s}, \quad \check{s} \doteq \frac{1}{L} \sum_i \check{s}_{(i)}, \quad \Pi_{\hat{\theta}} \doteq I - P'_{\hat{\theta}} \left(P_{\hat{\theta}} P'_{\hat{\theta}}\right)^{-1} P_{\hat{\theta}}, \tag{3.5}$$

где $'$ — символ транспонирования.

Далее из суммы $\hat{s} = \hat{z} + \hat{f}$ выделяются слагаемые $\hat{z}$ и $\hat{f}$. Единственность для $\hat{z}$ и $\hat{f}$ имеет место только тогда, когда уравнения $G_{\hat{\theta}} z = 0$ и $T_{\hat{\theta}} f = 0$ не имеют общих ненулевых решений, т. е. $\operatorname{nul} G_{\hat{\theta}} \cap \operatorname{nul} T_{\hat{\theta}} = \{0\}$.

В [4, 5] была получена следующая равносильная формулировка этого условия единственности. Пусть $R(\varsigma)$ — многочленная матрица. Каноническую форму $R(\varsigma)$, состоящую из нулей и инвариантных многочленов на диагонали [23, с. 135], обозначим $\operatorname{Sm} R(\varsigma)$.

[5] Упрощения связаны с заменой в условии $P_\theta s = 0$ матрицы P_θ на некоторую матрицу $\overline{P}_\theta$ более простой структуры.

Утверждение 2. [4, 5]. *Для блочно теплицевых матриц* $G \sim \gamma(\varsigma)$, $T \sim \varphi(\varsigma)$ *условие* $\operatorname{nul} G \cap \operatorname{nul} T = \{0\}$ *равносильно тому, что матрица* $R(\varsigma) \doteq \begin{pmatrix} \gamma(\varsigma) \\ \varphi(\varsigma) \end{pmatrix}$ *имеет полный ранг по столбцам для всех* $\varsigma \in \mathbb{R}$, *т. е. каноническая форма* $\operatorname{Sm} R(\varsigma)$ *состоит только из нулей и единиц и является "вертикальной" (число строк не меньше числа столбцов).*

При выполнении условия единственности для вычисления слагаемых $\hat{z}$ и $\hat{f}$ можно использовать формулы косого проецирования вектора $\hat{s}$ (3.5) на подпространства $\operatorname{nul} G$ и $\operatorname{nul} T$. Обозначим $\overline{G}$ и $\overline{T}$ матрицы, столбцы которых составлены из базисных векторов подпространств $\operatorname{nul} G$ и $\operatorname{nul} T$.

Утверждение 3. [4, 5, 6]. *Пусть* $\hat{s} = \hat{z} + \hat{f}$, $G\hat{z} = 0$, $T\hat{f} = 0$. *Тогда*

$$\begin{cases} \hat{z} = \overline{G}\left(T_1'\overline{G}\right)^{-1} T_1'\hat{s}, \quad T_1' \doteq T'T\overline{G}, \\ \hat{f} = \overline{T}\left(G_1'\overline{T}\right)^{-1} G_1'\hat{s} = \hat{s} - \hat{z}, \quad G_1' \doteq G'G\overline{T}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Решение задачи (3.4) может быть получено без использования формул (3.5):

Утверждение 4. [6]. *Задача* (3.4) *имеет равносильное решение*

$$\begin{cases} \hat{f} = \overline{T}\left(G_2'\overline{T}\right)^{-1} G_2'\check{s}, \quad G_2' \doteq G'\left(GG'\right)^{-1} G\overline{T}, \\ \hat{z} = \left[I - G'\left(GG'\right)^{-1} G\right](\check{s} - \hat{f}), \\ \hat{s} = \hat{z} + \hat{f}. \end{cases} \tag{3.7}$$

Алгоритмы рекуррентных вычислений $\hat{z}$ и $\hat{f}$ по формулам (3.5), (3.6) и (3.7) для блочно теплицевых матриц G, T, P приведены в [6, 12, 13].

Для каждого значения $\hat{\theta}$ оценки $\hat{z}$ и $\hat{f}$ (3.5), (3.6), (3.7) линейно зависят от наблюдений $\check{s}_{(1)}, \ldots, \check{s}_{(L)}$. Поэтому из состоятельности оценки $\hat{\theta}$ (3.2) следует состоятельность оценок $\hat{z}$ и $\hat{f}$.

Замечание о методах идентификации 1-го и 2-го рода

Значения идентифицируемых параметров θ вычисляются как предельные значения некоторой последовательности оценок $\hat{\theta}_i$, построенных по измерительной выборке растущего объема. Здесь возможны два случая:

1. Объем выборки растет за счет длины интервала наблюдения $N \to \infty$ при конечном числе L измеряемых процессов $\check{s}$ (статистический предел по времени).

2. Объем выборки растет за счет числа измеренных процессов $L \to \infty$ при конечной длине интервала наблюдения N (статистический предел по ансамблю).

Назовем методы идентификации со статистическим пределом *по времени* методами *1-го рода*, а со статистическим пределом *по ансамблю* — методами *2-го рода.* К первым можно отнести [27, 28, 29, 30]. Типичными представителями методов 2-го рода являются орторегрессионные (вариационные) методы идентификации [12, 13, 14, 15, 17, 18, 19].

Пусть $n_1 = r$, т. е. процесс тренда описывается однородным разностным уравнением. Если корни многочлена $\det \tau(\varsigma)$ лежат внутри единичного круга, то в пределе $N \to \infty$ тренд в среднеквадратическом смысле сходится к нулю:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_i \|f[i]\|^2 = 0.$$

Это делает невозможным[6] оценку параметров уравнения тренда любым методом, предполагающим статистический предел 1-го рода по времени ($N \to \infty$). Состоятельные оценки параметров уравнения тренда в этом случае могут быть получены только в пределе по ансамблю $L \to \infty$ при конечных N. Это приводит к необходимости использовать методы 2-го рода, например, орторегрессионные при аддитивных ошибках в наблюдениях, или линейный метод наименьших квадратов в случае ошибок в невязке уравнения.

Другим случаем, когда применимы методы идентификации только 2-го рода, являются неустойчивые тренды (корни многочлена $\det \tau(\varsigma)$ лежат вне единичного круга).

[6]В силу невыполнения условия постоянного возбуждения наблюдаемого сигнала, см. [28, гл. 14].

Такие же замечания можно сделать и в случае однородного уравнения ряда ($n = r$).

4 Примеры

1. Рассмотрим следующий частный случай. Пусть

$$\gamma(\varsigma) = \begin{pmatrix} \alpha_{11}(\varsigma) & \ldots & \alpha_{1r}(\varsigma) & \beta_{11}(\varsigma) & \ldots & \beta_{1m}(\varsigma) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{r1}(\varsigma) & \ldots & \alpha_{rr}(\varsigma) & \beta_{r1}(\varsigma) & \ldots & \beta_{rm}(\varsigma) \end{pmatrix} \doteq \tag{4.1}$$

$$\doteq \begin{pmatrix} \alpha(\varsigma) & \beta(\varsigma) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r\times(r+m)}[\varsigma],$$

$$\tau(\varsigma) = \begin{pmatrix} \varphi(\varsigma) & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \varphi(\varsigma) & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} = \tag{4.2}$$

$$= \begin{pmatrix} I_r \otimes \varphi(\varsigma) & 0 \\ 0 & I_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(r+m)\times(r+m)}[\varsigma], \quad m \geqslant 1,$$

$$\varphi(\varsigma) = \varphi_{q_1}\varsigma^{q_1} + \ldots + \varphi_1\varsigma + \varphi_0 \in \mathbb{R}^1[\varsigma],$$

при этом $\det\alpha(\varsigma) = 0$ не более чем в конечном числе точек $\varsigma \in \mathbb{R}$ и НОД$(\varphi, \det\alpha) = 1$.

Поясним значение этого частного случая. Первое, наличие клетки I_m в матрице $\tau(\varsigma)$ вызвано необходимостью удовлетворить условиям единственности[7] из утверждения 2 и обеспечить тем самым невырожденность обращаемых матриц в формулах (3.6), (3.7) (см. [7, раздел 5]). Система

[7]Расположение r многочленов $\varphi(\varsigma)$ и m единиц на диагонали $\tau(\varsigma)$ может быть произвольным, оно ограничено только условием, что $\det\tilde{\alpha}(\varsigma) = 0$ не более чем в конечном числе точек $\varsigma \in \mathbb{R}$ и НОД$(\varphi, \det\tilde{\alpha}) = 1$, где $\tilde{\alpha}(\varsigma)$ — подматрица из столбцов $\gamma(\varsigma)$, расположенных “напротив” многочленов $\varphi(\varsigma)$.

(2.2), описывающая суммарные процессы $s = z + f$, не изменится, если заменить $\tau(\varsigma)$ (4.2) на матрицу $\tilde{\tau}(\varsigma) = I_{r+m} \otimes \varphi(\varsigma)$ без единиц на диагонали (см. [7, следствие утверждения 10]). Значит, матрицы $\gamma(\varsigma)$ (4.1), $\tau(\varsigma)$ (4.2) описывают ряд z с трендом f,

$$f[k] = \begin{pmatrix} f_1[k]; & \ldots; & f_{r+m}[k] \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{r+m},$$

каждая i-я компонента тренда подчиняется уравнению

$$\varphi_{q_1} f_i[k+q_1] + \ldots + \varphi_0 f_i[k] = 0, \quad k \in \overline{1, N-q_1} \tag{4.3}$$

со свободными начальными условиями $\begin{pmatrix} f_i[1], & \ldots, & f_i[q_1] \end{pmatrix}$. Оптимальные значения начальных условий тренда зависят от предъявленных наблюдений суммарного процесса $\check{s}_{(1)}, \ldots, \check{s}_{(L)}$ (3.1) и вычисляются по формулам (3.5), (3.6), (3.7). Таким образом, в рассматриваемом случае тренды являются решениями однородных разностных уравнений (4.3) заданного порядка, коэффициенты которых могут быть как известными, так и подлежать идентификации.

Утверждение 5. *Для матриц* $\gamma(\varsigma)$ (4.1) *и* $\tau(\varsigma)$ (4.2) *суммарный процесс описывается уравнением* (2.2) *с матрицей*

$$\pi(\varsigma) = \varphi(\varsigma)\gamma(\varsigma). \tag{4.4}$$

Доказательство дано в [7, утверждение 8].

2. Рассмотрим интервал наблюдения длиной в 3 отсчета: $N = 3$. Процесс $z[k] = (y[k]; -u[k])$ подчиним уравнению вида (1.4):

$$y[k+1] - ay[k] = bu[k], \quad k = 1, 2. \tag{4.5}$$

Здесь $p = 1$, $r = 1$, $n = 2$,

$$G = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} -a & b & 1 & 0 & & \\ \hline & & -a & b & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} -a & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 & b \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \gamma(\varsigma) = \begin{pmatrix} \alpha(\varsigma) & \beta(\varsigma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varsigma - a & b \end{pmatrix}.$$

Первое соответствие $\sim$ достигается перестановкой столбцов и удалением нулевого столбца, второе соответствие с многочленными матрицами описано выше.

Процесс тренда $f[k] = (f_y[k]; f_u[k])$ подчиним уравнениям (1.3), (1.2), (4.2) с параметрами $q = 1$, $r_1 = 2$, $n = 2$,

$$T = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & & -1 & & & \\ & 1 & & 0 & & \\ \hline & & 1 & & -1 & \\ & & & 1 & & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \tau(\varsigma) = \begin{pmatrix} \varphi(\varsigma) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\varsigma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, предполагается, что тренд является константой и присутствует только в компоненте[8] y: $f[k] = (f_y[k]; 0)$. Уравнение тренда (4.3) имеет вид

$$-f_y[k+1] + f_y[k] = 0, \quad k = 1, 2,$$

начальное условие (амплитуда трендовой константы) $f_y[1]$ будет вычислена из уравнений (3.5), (3.6), (3.7).

Пусть коэффициенты a, b неизвестны. Рассмотрим задачу 2, опустив метку $*$ в индексах величин.

Задача. По наблюдениям $\check{s} = z + f + \eta$ суммарного процесса с возмущениями вычислить оценки $\hat{\theta}$, $\hat{z}$, $\hat{f}$ вектора параметров $\theta = (a; b)$, траектории z и тренда f.

Увеличим длину интервала наблюдения до значения $N = 5$:

$$G \sim \left(\begin{array}{ccccc|cccc} a & -1 & & & 0 & b & & & 0 \\ & a & -1 & & & & b & & \\ & & a & -1 & & & & b & \\ 0 & & & a & -1 & 0 & & & b \end{array}\right),$$

[8] В данном примере невозможно вычислить константные тренды, если они присутствуют сразу в обеих компонентах y, u, поскольку нарушается условие единственности из утверждения 2. Подробней см. [5].

$$T \sim \left(\begin{array}{ccccc|cccc}
1 & -1 & & & 0 & & & & \\
 & 1 & -1 & & & & & 0 & \\
 & & 1 & -1 & & & & & \\
0 & & & 1 & -1 & & & & \\
\hline
 & & & & & 1 & & & 0 \\
 & & 0 & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & 1 & \\
 & & & & & 0 & & & 1
\end{array}\right).$$

Согласно утверждению 5, матрица P уравнения суммарного процесса имеет вид:

$$P \sim \pi(\varsigma) = \varphi(\varsigma) \begin{pmatrix} \alpha(\varsigma) & \beta(\varsigma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varsigma^2 - (a+1)\,\varsigma + a & b - b\varsigma \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|cccc}
a & -(a+1) & 1 & & & 0 & b & -b & & 0 \\
 & a & -(a+1) & 1 & & & & b & -b & \\
0 & & & a & -(a+1) & 1 & 0 & & b & -b
\end{array}\right).$$

Пусть возмущения имеют стохастический характер: $\eta \in \mathbf{N}(0, \sigma^2 I)$. Тогда параметр $\theta = (a; b)$ состоятельно идентифицируется по наблюдениям $\check{s}_{(1)}, \ldots, \check{s}_{(L)}$ орторегрессионным методом (раздел 3). Оценки $\hat{z}$ и $\hat{f}$ вычисляются по формулам (3.7) с подстановкой

$$\overline{T} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}'.$$

3. Предположим, что коэффициенты уравнения (4.5) для процесса z известны: $a = 0.99$, $b = 1$. Рассмотрим уравнение тренда (4.3) 2-го порядка ($q = 2$):

$$\varphi(\varsigma) = \varphi_0 + \varphi_1 \varsigma + \varsigma^2,$$

$$T \sim \begin{pmatrix} \varphi(\varsigma) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|cccc} \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & 0 & & & & \\ & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & & 0 & & \\ 0 & & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & & & & \\ \hline & & & & & 1 & & & 0 \\ & & & & & & 1 & & \\ & & 0 & & & & & 1 & \\ & & & & & 0 & & & 1 \end{array}\right).$$

Пусть коэффициенты φ_0, φ_1 уравнения тренда не даны и подлежат идентификации.

Матрица P уравнения суммарного процесса имеет вид:

$$P \sim \pi(\varsigma) = \varphi(\varsigma) \begin{pmatrix} \alpha(\varsigma) & \beta(\varsigma) \end{pmatrix} = (\varphi_0 + \varphi_1\varsigma + \varsigma^2) \begin{pmatrix} \varsigma - 0.99 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0.99\varphi_0 + (\varphi_0 - 0.99\varphi_1)\varsigma + (\varphi_1 - 0.99)\varsigma^2 + \varsigma^3, & \varphi_0 + \varphi_1\varsigma + \varsigma^2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|cccc} -0.99\varphi_0 & \varphi_0 - 0.99\varphi_1 & \varphi_1 - 0.99 & 1 & 0 & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 & 0 \\ 0 & -0.99\varphi_0 & \varphi_0 - 0.99\varphi_1 & \varphi_1 - 0.99 & 1 & 0 & \varphi_0 & \varphi_1 & 1 \end{array}\right),$$

$$l = 3, \quad r_2 = 1.$$

Параметр $\theta = (\varphi_0; \varphi_1)$ состоятельно идентифицируется по наблюдениям $\check{s}_{(1)}, \ldots \check{s}_{(L)}$ как и в предыдущем примере. Оценки $\hat{z}$ и $\hat{f}$ вычисляются по формулам (3.7) с подстановкой

$$\overline{T} = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 & \mu^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)'$$

в случае действительных корней λ, μ многочлена $\hat{\varphi}_0 + \hat{\varphi}_1\varsigma + \varsigma^2$ или

$$\overline{T} = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} 0 & \rho\sin\omega & \rho^2\sin 2\omega & \rho^3\sin 3\omega & \rho^4\sin 4\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \rho\cos\omega & \rho^2\cos 2\omega & \rho^3\cos 3\omega & \rho^4\cos 4\omega & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)'$$

в случае пары комплексных корней $\lambda_{1,2} = \rho\exp(\pm\mathbf{i}\omega)$.

Заметим, что здесь все оцениваемые параметры сосредоточены в "неуправляемой" части $\varphi_\theta(\varsigma)$ уравнения (2.2) суммарного процесса с матрицей $\pi_\theta(\varsigma) = \varphi_\theta(\varsigma) \begin{pmatrix} \alpha(\varsigma) & \beta(\varsigma) \end{pmatrix}$.

Дополнительные примеры можно найти в [4, 5, 6].

5 Заключение

Рассмотрены задачи оценки тренда временного ряда по ансамблю измерений коротких отрезков ряда (не длиннее переходных характеристик). Предполагается, что линейные разностные уравнения, описывающие ряд и тренд, известны с точностью до порядка. Предложены явные формулы вычисления тренда при известных уравнениях ряда и тренда, а также алгоритмы вычисления (идентификации) неизвестных параметров уравнений ряда и тренда на основе орторегрессионных методов.

Отличительной особенностью используемых орторегрессионных методов является возможность идентификации параметров уравнений численными процедурами с малым числом итераций и большим радиусом сходимости, что позволяет проводить вычисления в реальном времени. Оценки параметров, получаемые вариационными методами, обладают свойством состоятельности при идентификации по ансамблю наблюдений коротких (не длиннее переходного процесса) отрезков рядов. Это позволяет снять ограничения на устойчивость и управляемость идентифицируемых систем.

Показано, что системы линейных уравнений, описывающие суммарные динамические процессы “ряд+тренд”, всегда неуправляемы. Таким образом, вариационные методы оказываются эффективным инструментом для оценки параметров уравнений ряда и тренда.

Введен в рассмотрение новый класс задач идентификации систем без свойств устойчивости и управляемости.

6 Приложение

6.1 Доказательство утверждения 1

Пусть матрица G состоит из $(N-p)\times N$ блоков размерности $r\times n$ и матрица T состоит из $(N-q)\times N$ блоков размерности $r_1\times n$. Нужно построить матрицу P из $(N-l)\times N$ блоков размерности $r_2\times n$, отвечающую соотношению $\operatorname{nul} P = \operatorname{nul} G + \operatorname{nul} T$. Ассоциируем G и T с многочленными матрицами $\gamma(\varsigma)$, $\tau(\varsigma)$ размерности соответственно $r\times n$, $r_1\times n$. Для этого введем числовую матрицу $E_{N-p} \doteq \begin{pmatrix} I_{N-p} & 0_{p'} \end{pmatrix}$ размерности $(N-p)\times(N-p+p')$, $p'\geqslant p$, и определим оператор сдвига ς посредством соотношения

$$\varsigma^k E_{N-p} \doteq \begin{pmatrix} 0_k & I_{N-p} & 0_{p'-k} \end{pmatrix}, \quad k\in\overline{0,p'}. \tag{6.1}$$

Тогда матрицы G, T с точностью до перестановки строк и столбцов представимы через кронекеровы произведения:

$$G = \gamma(\varsigma)\otimes E_{N-p}, \quad T = \tau(\varsigma)\otimes E_{N-q}$$

(более подробные выкладки приведены в статье [4]). Далее, от соотношения $\operatorname{nul} P = \operatorname{nul} G + \operatorname{nul} T$ для правых нуль-пространств матриц всегда можно перейти к равносильному соотношению $\operatorname{lin} P = \operatorname{lin} G\cap\operatorname{lin} T$ для линейных оболочек строк. Множество $\operatorname{lin} G$ состоит из строк вида $aG = a(\varsigma)\gamma(\varsigma)\otimes E_1$, где многочленная строка $a(\varsigma)$ вычисляется по числовой строке a [31, раздел 4]. Множество $\operatorname{lin} T$ состоит из строк вида $bT = b(\varsigma)\tau(\varsigma)\otimes E_1$. Учитывая равенство $\operatorname{lin} P = \operatorname{lin} G\cap\operatorname{lin} T$ видим, что множество $\operatorname{lin} P$ состоит из строк вида $\rho(\varsigma)\otimes E_1$, где многочленные строки $\rho(\varsigma)$ представимы в виде произведений

$$\rho(\varsigma) = a(\varsigma)\gamma(\varsigma) = b(\varsigma)\tau(\varsigma) \tag{6.2}$$

— для всех тех $a(\varsigma)$, $b(\varsigma)$, для которых последнее равенство возможно. Другими словами,

$$\operatorname{lin}\rho(\varsigma) = \operatorname{lin}\gamma(\varsigma)\cap\operatorname{lin}\tau(\varsigma),$$

где $\operatorname{lin}\rho(\varsigma)$ есть множество многочленных строк вида $\eta(\varsigma)\rho(\varsigma)$, $\eta(\varsigma)$ — произвольный многочлен. Множество $\operatorname{lin} P = \operatorname{lin}\rho(\varsigma) \otimes E_1$ обладает, таким образом, структурой модуля [32]. Тогда можно выбрать многочленную матрицу[9] $\pi(\varsigma)$, строки которой образуют базис этого модуля. Следовательно, $P = \pi(\varsigma) \otimes E_{N-l}$, где l — наибольшая степень строки в $\pi(\varsigma)$. Утверждение доказано.

6.2 Доказательство теоремы 1

Из равенства (6.2) следует, что матрица $\pi(\varsigma)$ представима в виде произведения $\pi(\varsigma) = \mu(\varsigma)\gamma(\varsigma)$, где $\mu(\varsigma)$ — некоторая многочленная матрица размерности $r_2 \times r$, $r_2 \leqslant r$, с линейно независимыми строками. Сначала рассмотрим случай $r = 1$, т. е. когда $\gamma(\varsigma)$ — многочленная строка. Неуправляемость системы (2.2) в этом случае вполне очевидна[10]. Здесь мы только укажем вид общего делителя $\mu(\varsigma)$ многочленов, из которых составлена строка $\pi(\varsigma)$.

Неособенную многочленную матрицу $u(\varsigma)$ будем называть *унимодулярной*[11], если ее определитель не зависит от ς. Выберем унимодулярные матрицы $u(\varsigma)$ и $v(\varsigma)$ такие, что верно равенство

$$\tau(\varsigma) = u(\varsigma) \begin{pmatrix} \tau_1(\varsigma) & & 0 & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \tau_{r_1}(\varsigma) & 0 \end{pmatrix} v(\varsigma) \doteq u(\varsigma)\tau'(\varsigma)v(\varsigma),$$

где $\tau_i(\varsigma)$ — ненулевые скалярные многочлены. Для получения матриц $u(\varsigma)$ и $v(\varsigma)$ можно использовать алгоритм приведения $\tau(\varsigma)$ в каноническую форму [23, с. 135]. Известно, что

$$\pi(\varsigma) = \mu(\varsigma)\gamma(\varsigma) = \lambda(\varsigma)\tau(\varsigma),$$

[9] Двусторонне собственную по строкам, согласно условию (ii).

[10] Степень многочлена $\mu(\varsigma)$ должна быть выше нуля хотя бы потому, что в противном случае совпадают подпространства $\operatorname{nul} P = \operatorname{nul} G + \operatorname{nul} T$ и $\operatorname{nul} G$, а это противоречит условию $\operatorname{nul} G \cap \operatorname{nul} T = \{0\}$.

[11] Всякая унимодулярная матрица может быть представлена как произведение конечного числа матриц элементарных преобразований (для этого достаточно заметить, что каноническая форма унимодулярной матрицы есть единичная матрица) [23, с. 135].

где $\mu(\varsigma)$ — некоторый скалярный многочлен, $\lambda(\varsigma)$ — многочленная строка размерности $1 \times r_1$. Обозначим $\pi'(\varsigma) \doteq \pi(\varsigma)v(\varsigma)^{-1}$, $\gamma'(\varsigma) \doteq \gamma(\varsigma)v(\varsigma)^{-1}$, $\lambda'(\varsigma) \doteq \lambda(\varsigma)u(\varsigma)$. Тогда верно равенство

$$\pi'(\varsigma) = \mu(\varsigma)\gamma'(\varsigma) = \lambda'(\varsigma)\tau'(\varsigma).$$

Из определения диагональной матрицы $\tau'(\varsigma)$ следует, что последнее равенство, рассматриваемое как уравнение с неизвестными $\mu(\varsigma)$ и $\lambda'(\varsigma)$, возможно только если многочлен $\mu(\varsigma)$ делится без остатка на все многочлены $\tau_i(\varsigma)$ из диагонали матрицы $\tau'(\varsigma)$, и одновременно строка $\gamma'(\varsigma)$ имеет нулевые элементы на местах нулевых столбцов $\tau'(\varsigma)$:

$$\gamma'(\varsigma) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(\varsigma) & \ldots & \varepsilon_{r_1}(\varsigma) & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.3}$$

Если $\gamma'(\varsigma)$ имеет вид, отличный от (6.3), то необходимо получаем $\pi'(\varsigma) \equiv 0$ и $\pi(\varsigma) \equiv 0$. Формально это означает неуправляемость системы (2.2). Пусть строка $\gamma'(\varsigma)$ имеет вид (6.3). Тогда $\mu(\varsigma) = \mu_0(\varsigma)\tau_1(\varsigma)\ldots\tau_{r_1}(\varsigma)$, и верны равенства

$$\lambda'(\varsigma) = \mu(\varsigma)\gamma'(\varsigma) \begin{pmatrix} \tau_1(\varsigma)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \tau_{r_1}(\varsigma)^{-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \gamma'(\varsigma) \begin{pmatrix} \mu(\varsigma)\tau_1(\varsigma)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu(\varsigma)\tau_{r_1}(\varsigma)^{-1} \end{pmatrix},$$

откуда легко находится[12] $\lambda(\varsigma)$. Равенство $\pi'(\varsigma) = \mu(\varsigma)\gamma'(\varsigma)$ равносильно равенству $\pi(\varsigma) = \mu(\varsigma)\gamma(\varsigma)$, что означает неуправляемость суммарной системы с матрицей $\pi(\varsigma)$, если степень многочлена $\mu(\varsigma)$ выше нуля.

Перейдем к случаю $r \geqslant 2$. Пусть матрица $\gamma(\varsigma)$ состоит из многочленных строк $\gamma_1(\varsigma), \ldots, \gamma_r(\varsigma)$. Нужно построить базис $\pi(\varsigma)$ модуля

$$\operatorname{lin} \rho(\varsigma) = \operatorname{lin} \gamma(\varsigma) \cap \operatorname{lin} \tau(\varsigma).$$

[12]Случай $n = r_1 = 2$ при $u(\varsigma) = v(\varsigma) = I_2$ подробно разобран в статье [4] (раздел 8.3, пример Б).

Поскольку имеет место представление

$$\operatorname{lin}\gamma(\varsigma) = \operatorname{lin}\gamma_1(\varsigma) + \ldots + \operatorname{lin}\gamma_r(\varsigma),$$

получаем равенство

$$\operatorname{lin}\rho(\varsigma) = \operatorname{lin}\gamma_1(\varsigma) \cap \operatorname{lin}\tau(\varsigma) + \ldots + \operatorname{lin}\gamma_r(\varsigma) \cap \operatorname{lin}\tau(\varsigma). \tag{6.4}$$

Каждое слагаемое $\operatorname{lin}\gamma_i(\varsigma) \cap \operatorname{lin}\tau(\varsigma)$ здесь соответствует разобранному выше случаю $r = 1$. Базисная для этого слагаемого строка $\pi_i(\varsigma)$ отлична от нуля, только если строка $\gamma_i'(\varsigma)$ имеет вид (6.3). Если все $\pi_i(\varsigma)$ равны нулю, система формально неуправляема. Если какая-то строка $\pi_i(\varsigma)$ отлична от тождественного нуля, то она, как было показано выше, имеет вид $\pi_i(\varsigma) = \mu(\varsigma)\gamma_i(\varsigma)$.

Следовательно, базис модуля (6.4) всегда можно выбрать из строк матрицы $\pi(\varsigma) \doteq \mu(\varsigma)\overline{\gamma}(\varsigma)$, где $\overline{\gamma}(\varsigma)$ есть подматрица из строк $\gamma(\varsigma)$, для которых выполняется (6.3). Согласно предложению 1, система (2.2) с матрицей $\pi(\varsigma)$ неуправляема.

Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Бокс Дж., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Вып. 1, 2. М.: Мир, 1974.

[2] *Кашьяп Р.Л., Рао А.Р.* Построение динамических стохастических моделей по экспериментальным данным. М.: Наука, 1983.

[3] *Pollock, D.S.G.* Trend estimation and de-trending via rational square-wave filters // Journal of Econometrics. 2000. V. 99. No. 2. P. 317–334.

[4] *Ломов А.А.* Орторегрессионные методы оценивания параметров и задачи отделения трендов в линейных системах // Дифференциальные уравнения и процессы управления (http://www.neva.ru/journal). 2005. № 2. С. 1–86.

[5] *Ломов А.А.* Восстановление сигналов в линейных системах с трендами // Автоматика и телемеханика. (Принято к публикации). http://sciencefit.narod.ru/AiT-trends-2006/lomov_aa.pdf

[6] *Ломов А.А.* Алгоритмы оценки трендов в рядах с известной динамикой // Журнал вычислительной математики и математической физики. (Рукопись на рецензировании). http://sciencefit.narod.ru/JCMMPH-2006/lomov-trends-approx.pdf

[7] *Ломов А.А.* Задача отделения трендов в линейных системах // Труды V Международной конференции "Идентификация систем и задачи управления" SICPRO'06. Москва, 30 января – 2 февраля 2006 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2006. С. 1980–2009.

[8] *Белоглазов И.Н.* Оптимальные совместные оценивание и идентификация в дискретных линейных системах // ДАН СССР. 1983. Т. 273. № 4. С. 811–815.

[9] Справочник по теории автоматического управления / Под. ред. А.А. Красовского. М.: "Наука", 1987.

[10] *Maine R.E., Iliff K.W.* Formulation and Implementation of a Practical Algorithm for Parameter Estimation with Process and Measurement Noise // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1981. V. 41. No. 3. P. 558–579.

[11] *Егоршин А.О., Будянов В.П.* Сглаживание сигналов и оценивание динамических параметров в автоматических системах с помощью ЦВМ // Автометрия. 1973. № 1.

[12] *Егоршин А.О.* Метод наименьших квадратов и "быстрые" алгоритмы в вариационных задачах идентификации и фильтрации (метод ВИ) // Автометрия. 1988. № 1. С. 30–42.

[13] *Егоршин А.О.* Оптимизация параметров стационарных моделей в унитарном пространстве // Автоматика и телемеханика. 2004. № 12. С. 29–48.

[14] *Ломов А.А.* Орторегрессионные оценки параметров систем линейных разностных уравнений // Сибирский журнал индустриальной математики. 2005. Т. 8. № 3(23). С. 102–119.

[15] *Крамер Г.* Математические методы статистики. М.: Наука, 1975.

[16] *Аоки М.* Введение в методы оптимизации. М.: Наука, 1977.

[17] *Aoki M., Yue P.C.* On A Priori Error Estimates of Some Identification Methods // IEEE Trans. on Automat. Control. 1970. V. AC-15. P. 541–548.

[18] *Fuller W.A.* Measurement Error Models. New York: Wiley, 1987.

[19] *Бойчук Л.М., Чихрадзе Т.А.* Сравнение моделей, получаемых по методу наименьших квадратов и по ортогональной регрессии // Автоматика. 1985. № 5. С. 57–61.

[20] *Ломов А.А.* Идентификация линейных динамических систем по коротким участкам переходных процессов при аддитивных измерительных возмущениях // Известия РАН ТиСУ. 1997. № 3. С. 20–26.

[21] *Ломов А.А.* Условия различимости стационарных линейных систем // Дифференц. уравнения. 2003. Т. 39. № 2. С. 261–266.

[22] *Ломов А.А.* О различимости стационарных линейных систем с коэффициентами, зависящими от параметра // Сибирский журнал индустриальной математики. 2003. Т. 6. № 4(16). С. 60–66.

[23] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. М. : Наука, 1988.

[24] *Виллемс Я.* От временного ряда к линейной системе // Теория систем. Математические методы и моделирование. М.: Мир, 1989. С. 8–191. (Новое в зарубежной науке. Сер. Математика; Т. 44).

[25] The Control Handbook / Levine W.S., ed. Series: Electrical Engineering Handbook. Vol. 6. CRC Press: 1996.

[26] *Ломов А.А.* Сравнение методов оценивания параметров линейных динамических систем по измерениям коротких участков переходных процессов // Автоматика и телемеханика. 2005. № 3. С. 39–47.

[27] *Цыпкин А.З.* Основы информационной теории идентификации. М.: Наука, 1984.

[28] *Льюнг Л.С.* Идентификация систем. М.: Наука, 1991.

[29] *Жданов А.И., Кацюба О.А.* Идентификация по методу наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии при аддитивных ошибках измерений // Автоматика и телемеханика. 1982. № 2. С. 29–38.

[30] *Ворчик Б.Г.* Идентифицируемость линейных параметрических стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 1985. № 5. С. 64–78. № 7. С. 96–109.

[31] *Ломов А.А.* Минимальные описания стационарных линейных моделей // Труды Института математики СО РАН. Т.28, Модели и методы оптимизации. С. 91-117. Новосибирск: ИМ СО РАН, 1994.

[32] *Халмош П.* Конечномерные векторные пространства. М.: Физматгиз, 1963.